Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Scienze della Formazione

Master
"Internet, costruzione della conoscenza,
ambienti di apprendimento in rete"

L'ergonomia didattica dei DGS (*Dynamic Geometry Software*)

Teoria ed esempi applicativi

Relatore: Prof. Antonio CALVANI

Correlatore: Prof. Brunetto PIOCHI

Candidato:

Dott. Daniele PASSALACQUA

Matr. 4303929

Anno Accademico 2005-2006

Indice

Introduzione

Il nostro gruppo, formato da Graziella Cinosi, Pierluigi Ciambra, Francesco Guglielmi, Rita Meroni, Stefano Rossi e Daniele Passalacqua, ha scelto di valutare il grado di ergonomia didattica di alcuni software di geometria dinamica (Cabrì, GeoGebra e SketchUp), evidenziandone le positività e le negatività che si instaurano nell'interazione mente-medium, citando esempi concreti di utilizzo di tali software.

In particolare il sottoscritto ha approfondito le caratteristiche di *affordance* ed ergonomia didattica di GeoGebra e di SketchUp, il primo *opensource*, entrambi disponibili in versione gratuita.

Per la parte collettanea sono stati utilizzati strumenti di collaborazione a distanza, quali le tradizionali email, il forum e l'ambiente di lavoro Moodle messo a disposizione dall'università di Firenze.

Gli esempi citati sono stati da me proposti ad alunni di scuole medie della provincia di Genova negli anni scolastici 2005/2006 e 2006/2007.

Vorrei evidenziare come le immagini che illustrano gli esempi citati, tutti realizzati con i software in esame, non rendano appieno la dinamicità delle costruzioni. È come voler rappresentare un film mostrando solo alcuni fotogrammi. Per poter apprezzare appieno le potenzialità di questi strumenti ho indicato alcuni *link* che portano a pagine dinamicamente interattive realizzate dall'autore.[1]

---

[1] http://www.sinapsi.org/GeoGebra.htm

Ci siamo sostanzialmente orientati sull'analisi di *Dynamic Geometry Software (DGS)* sia bidimensionale che tridimensionale: Cabrì – GeoGebra – SketchUp - Club Pitagora

Tabella riassuntiva analisi software CABRÌ			
Fattori negativi		**Fattori positivi**	
Interazione dispersiva	È presente nel caso di scarsa padronanza dello strumento e carenza di conoscenza del territorio disciplinare	**Interazione con feedback orientativo**	È scarsa; lo studente deve fare ricorso a ciò che ha studiato; deve riflettere da solo; non ha aiuto dal software
Interazione invasiva	No; il software lascia tutto il tempo per riflettere e riproporre manipolazioni	**Interazione problemica aperta**	Il software si inquadra come elemento stimolatore nel passaggio dalla "geometria" intuitiva" alla "geometria deduttiva"; la costruzione di macro consente di personalizzare e semplificare la risoluzione dei problemi: liberato dalle procedure sequenziali informatiche, il focus è sul *core* del problema, con riduzione dell'errore e apprendimento teorico/pratico più veloce

Interazione vicariante o disabilitante	Essendo didattico, il software è stato volutamente costruito in modo da non sostituire le funzioni cognitive interne dello studente	**Interazione sinergica mente-medium**	È possibile, in tal caso il mezzo non sottrae energie all'investimento cognitivo, bensì ne consente una amplificazione; la buona e abituale padronanza del mezzo permette l'internalizzazione delle funzioni proprie dello strumento: fare calcoli più sofisticati stimola a risolvere quelli complessi
		Valore aggiunto	La frequentazione attiva e prolungata del mezzo: consente forme di conoscenza nuove, consolidamento di abilità, economie di lavoro e di tempo

Software **GEOGEBRA** (www.geogebra.at) Geometria Dinamica, Algebra and Analisi	
Autori	Markus Hohenwarter, University of Salzburg
Tipologia di software	GeoGebra è un software interattivo per la matematica dinamica che comprende geometria, algebra e analisi rivolto all'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.
Licenza	Open Source (gratuito)
Caratteristiche	GeoGebra è un sistema di geometria dinamica. Si possono costruire punti, vettori, segmenti, rette, coniche come pure funzioni e modificarle dinamicamente. Equazioni e coordinate possono anche essere inserite direttamente. Così, GeoGebra ha la possibilità di trattare variabili numeriche, vettori e punti, calcolare derivative e integrali di funzioni e dispone di comandi come Radice o Estremo. Queste due visualizzazioni sono caratteristiche di GeoGebra: un'espressione nella finestra algebra corrisponde a un oggetto nella finestra geometria e viceversa.
Aspetto grafico	Oltre alla finestra che contiene il piano cartesiano e le figure disegnate è possibile visualizzare a sinistra una colonna chiamata "algebra" che contiene tre cartelle: "oggetti liberi" "oggetti dipendenti" e "oggetti ausiliari", in basso inoltre c'è il campo di input che permette di inserire direttamente equazioni di rette o coniche che verranno automaticamente disegnate nella finestra "piano cartesiano"
Menu	Oltre ai classici menu a discesa File, Modifica, Visualizza, Opzioni, Finestra e Aiuto ci sono 9 pulsanti a discesa che permettono di costruire i principali elementi geometrici. Ad ogni elemento viene automaticamente associata nella finestra "Algebra" la sua descrizione analitica (coordinate cartesiane o equazione della curva) indicando se si tratta di un oggetto libero o dipendente. La potenza di GeoGebra sta nello scambio continuo tra le rappresentazioni simboliche e quelle visive delle costruzioni geometriche
Principi didattici	1. Orientare le attività dello studente, 2. interazione tra rappresentazioni iconiche e simboliche; 3. apprendimento sperimentale della matematica
Interazioni	1. Con *feedback* orientativo: il software permette la verifica immediata della validità della

	costruzione geometrica utilizzando la funzione trascinamento che consente di deformare le figure con il mouse 2. Interazione sinergica mente-medium: sempre grazie al potente strumento "*trascina*" è possibile verificare sperimentalmente come alcune proprietà rimangono invariate: ad esempio l'ortocentro, il circocentro di un triangolo, l'equivalenza dei quadrati nel teorema di Pitagora
Help	Presente sia in linea (http://www.geogebra.at/help/docuit/) che scaricabile in formato pdf (http://www.geogebra.at/help/docuit.pdf)
	"There is no true understanding in mathematics for students who do not incorporate into their cognitive architecture the various registers of semiotic representations used to do mathematics." (Duval R., 1999) [2]

[2] Duval, R. (1999): *Representation, Vision and Visualisation: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. In F. Hitt, M. Santos (Eds), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME. México: 3-26.

Tabella riassuntiva a completamento analisi software "SKETCHUP" http://sketchup.google.com/			
Fattori negativi		**Fattori positivi**	
Interazione dispersiva (sovraccarico degli stimoli)	Assente, gli stimoli non sono invasivi, l'utente è stimolato ad esplorare il mondo in 3d con la potente funzione "*orbit*" analoga al "*drag*" del mondo bidimensionale	**Interazione con feedback orientativo** (cibernetico) di tipo automatico	Presente: possibilità di deformare, ruotare, trascinare e orbitare nello spazio tridimensionali che diventano oggetti virtuali manipolabili.
Interazione invasiva	Assente, non ci sono timer o scadenze, lo studente può affrontare la costruzione geometrica in tranquillità	**Interazione problemica aperta**	Presente in parte, essendo un software non dedicato alla didattica, non ha quegli gli strumenti specifici di altri software, come le costruzioni con "riga e compasso" della geometria euclidea. Rimane un potente *tool* di visualizzazione 3d.
Interazione vicariante o disabilitante	Assente o scarsa: a differenza dell'analogo DSG (Cabrì 3d) non ha figure geometriche tridimensionali, queste vengono realizzate tutte a partire dalle fondamentali: punto, linea, cerchio, poligono	**Interazione sinergica mente-medium** il computer "accresce" la mente	Offre la possibilità di vedere i problemi da un punto di vista non consentito a occhio nudo, la possibilità di orbitare, sezionare, deformare oggetti tridimensionali la cui costruzione con matita e foglio da disegno richiederebbe ore. Consente di interiorizzare le potenzialità della tecnologia.
		Valore aggiunto	La possibilità di "prendere in mano" e ruotare un oggetto solido finora visto solo sulle pagine dei libri di testo in rappresentazioni statiche e bidimensionali, è un amplificatore cognitivo notevole.

<table>
<tr><th colspan="2">Tabella riassuntiva a completamento analisi software “CLUB PITAGORA”</th></tr>
<tr><th>Descrizione Club Pitagora</th><th>Differenze tra Cabrì e Club Pitagora</th></tr>
<tr><td>Il programma è dell’Anastasis di Bologna (www.anastasis.it) e collegandosi al sito si può trovare una versione demo di questo come di altri programmi della Cooperativa.
È pensato per alunni della scuola di base e per le sue semplici caratteristiche può esser usato con alunni che hanno difficoltà di apprendimento sui concetti fondamentali della geometria piana o nel disegno delle figure geometriche.
Questo software può esser usato quindi sia per comprendere ed apprendere tramite esercizi le nozioni di geometria (teoremi, regole e definizioni) sia soprattutto come supporto per il disegno di figure.
Il disegnatore automatico aiuta a tracciare le figure relative agli esercizi che via via vengono proposti e può esser utilizzato in modo autonomo anche da parte dei ragazzi con difficoltà (anche se è sempre meglio l’organizzazione di un piano didattico da parte dell’insegnate di sostegno).il software si articola su più livelli:
1. conoscere e riconoscere le figure
2. costruire e ricostruire le figure (come un gioco tangram)
3. operare con le figure
4. disegnare e definire spazi geometrici
5. risolvere semplici esercizi su calcoli di perimetro ed area, che sono concetti secondari della geometria, poiché a mio avviso è più importante che la geometria insegni a riflettere sullo spazio e sulla sua organizzazione piuttosto che su regole mnemoniche.
La funzione disegno aiuta a tracciare rette, segmenti e figure su un piano quadrettato che ripropone fedelmente un foglio di quaderno.</td><td>La differenza sostanziale tra i due software sta nella semplicità del “Club di Pitagora” con cui riesce a fare comprendere e apprendere facili concetti o formule, con il supporto della creazione di semplici figure geometriche; adatto ai bambini di 8-11 anni: del resto è nato per questo. (figure geometriche regolari piane e loro classificazione, perpendicolarità e parallelismo, perimetro, area). Per girare necessita solo di 16 Mb di RAM
Cabri, è più complesso, va oltre, consente di costruire oggetti base della geometria euclidea (punti, segmenti, rette, circonferenze; costruzioni quali il punto medio, la bisettrice,… e poi, pensa alle versioni II Plus, e a quella 3D (richiede : dinamica e interattiva che porta ad una immediata intuizione e visualizzazione di proprietà geometriche nello spazio; è adatto a ragazzi dai 12-14 anni in su, anche per studenti universitari. Gira con almeno 256 Mb di RAM.</td></tr>
</table>

Considerazioni iniziali

Lo strumento tecnologico va usato se di esso si ha ottima padronanza, al fine di ridurre le forme ansiogene o di autoemarginazione, poco gestibili nella didattica.

Se lo studente mantiene la concentrazione sul problema da risolvere, e non si perde nell'uso strumentale, trovano spazio forme di riflessività significative, che sono necessarie per sviluppare l'attività dimostrativa con un software; anche perché l'interattività non è molto alta.

Non vanno trascurati alcuni rischi in cui si può incappare. La tecnologia non deve inibire le abilità conseguenti alla generazione di ipotesi; l'attività di esplorazione mentale legata alle dimostrazioni (matita e righello) non deve subire forme disattivanti, o atrofizzanti. Il docente deve esserne consapevole nel condurre all'uso di questi software dinamici: è un docente trasformato, più consapevole, preparato, competente; è un docente che guida lo studente a "imparare a dimostrare", a costruire modelli reali.

Grazie alle tecniche di trascinamento, un programma, ad es., come Cabri, promette continuità cognitiva: dalla fase di ipotesi, a quella costruttiva della dimostrazione, recuperando il concetto di software come amplificatore cognitivo, secondo me, accelerando il pensiero dinamico.

Per progettare un'azione educativa non è possibile considerare il problema del metodo didattico in maniera isolata ed autonoma, poiché questo è certamente da collegare in modo stretto con la scelta e la definizione degli obiettivi e la determinazione dei contenuti che devono essere raggiunti.

Nell'elaborazione di un metodo è sempre importante sapere dove si vuole arrivare.

La ricerca o l'accettazione di un metodo come quello migliore o quello giusto non è sempre sostenibile. Le domande fondamentali a cui deve rispondere la progettazione di un metodo didattico sono di massima due:

- Con il metodo scelto gli allievi acquisiranno i contenuti formativi prescelti?
- Gli obiettivi educativi permangono profondamente nella personalità dell'allievo?

Il ruolo del metodo didattico è quindi quello di creare le condizioni che consentano l'attivazione di quelle operazioni intellettuali e/o psicomotorie necessarie all'incorporazione del contenuto dell'apprendimento nella struttura conoscitiva dell'alunno.

Tramite il metodo, l'insegnante e la disciplina si adeguano ai bisogni dell'allievo e non viceversa. L'avvicinamento tra materia ed allievo avviene utilizzando percorsi e metodologie che possono essere le più varie.

In linea teorica le metodologie praticabili nella nostra scuola sia primaria che secondaria dovrebbero :

a) favorire l'organizzazione dei contenuti didattici secondo unità didattiche per tentare di promuovere nuovi momenti trasversali e interdisciplinari tra le varie materie. Può essere utile in situazioni favorevoli ricercare ambiti e percorsi che si prestano bene ad essere affrontati secondo la metodologia della ricerca;

b) privilegiare i percorsi dal semplice al complesso, dal concreto all'astratto;

c) favorire un approccio *problem based*, in modo da innescare uno scambio continuo ed interattivo tra il fare e il saper fare, cercando per ogni percorso di potenziare la didattica operativa;

d) favorire il dialogo, la discussione, i dibattiti su argomenti che permettano ai docenti di guidare il ragazzo nei diversi processi conoscitivi;

e) potenziare il lavoro individualizzato in modo da consolidare quelle abilità strumentali indispensabili per un'uscita adeguata dal ciclo di studi;

f) favorire il lavoro di gruppo, in modo da attenuare casi di non socializzazione e di resistenze da parte degli allievi al normale procedere della pratica educativa;

g) potenziare l'uso della "relazione" orale e scritta in modo da abituare i ragazzi ad una continua verifica delle conoscenze acquisite nei vari ambiti disciplinari.

Clark [3] propone quattro famiglie di strategie didattiche:

---

[3] Ranieri, M. (2004), *E-learning modelli e strategie didattiche*, Erickson, pp 71-74

1. Ricettiva: che ha lo scopo di trasmettere informazioni e quindi è utilizzabile quando lo scopo principale è quello di comunicare o trasmettere informazioni fondamentali o propedeutiche per qualche altra azione didattica complessa.

2. Sequenziale/Direttiva: si basa su brevi lezioni collegate ad attività pratiche con feedback correttivi successivi per progredire dal semplice al complesso . Tipicamente utilizzata quando si vuole far apprendere abilità procedurali o per addestramenti informatici e/o scientifici. I contenuti devono essere in forma ben strutturata per poter essere utilizzati con questa strategia didattica.

3. A scoperta guidata : strategia didattica basata sull'apprendimento per problemi. Usa simulazioni esperienziali. L'errore è valorizzato perché si parte da ciò che non si è capito o che è stato fallito per costruire e ricostruire apprendimenti significativi. Tale strategia è indicata per sviluppare capacità di *problem solving* e per favorire acquisizioni di competenze in domini cognitivi complessi. Necessita di modelli esperti e di docenti/tutor qualificati.

4. Esplorativa: strategia didattica caratterizzata da un forte orientamento alla navigazione dell'ambiente didattico e quindi centrata sull'allievo che controlla in modo quasi autonomo il proprio processo di apprendimento; la curiosità e l'esplorazione di situazioni e ambienti è quindi fondamentale per creare motivazione all'apprendimento stesso.

A queste quattro famiglie di strategie la dott.ssa Ranieri ne affianca una quinta

5. Collaborativa : strategia didattica utilizzabile quando gli studenti già posseggono un alto grado di autonomia con competenze già caratterizzate e alta disponibilità alla collaborazione (*peer learning* e *peer tutoring*). Questa strategia didattica può essere utilizzata per elaborare progetti poiché si avvale di un approccio *problem based*.

Il ruolo centrale che i programmi della scuola affidano all'insegnamento per problemi dà spazio ad un modo di fare scuola che parta appunto dalla soluzione di problemi concreti per condurre ad appropriarsi dei concetti matematici.

Da tutti infatti è ritenuta ampiamente oramai superata la pratica della ripetizione di esercizi per promuovere un apprendimento meccanico che possa prescindere dalla capacità di astrazione del soggetto. Tale pratica si è dimostrata infatti inefficace nel confronto con la realtà e nella verifica a medio e lungo termine si è scontrata con la minore capacità di memoria di molti alunni sia normodotati che in situazione di handicap (Piochi, 2005).

L'approccio per problemi invece, soprattutto quando nasce da situazioni concrete aumenta la motivazione dei discenti stimolando le capacità attentive e l'uso di competenze già in possesso dell'alunno. Il lavorare insieme fornisce poi un legante non indifferente che se ben diretto porta il ragazzo ad acquisire capacità di apprendimento non indifferenti.

Negli ultimi anni è stato introdotto l'uso del computer a scuola, sia come ausilio per la comunicazioni per studenti in difficoltà, sia come valido strumento di supporto all'apprendimento. La capacità di coinvolgimento attraverso immagini e suoni, la possibilità di segmentare le richieste e di offrire correzioni dell'errore, fanno di un buon software un alleato importante del lavoro dell'insegnante.

Un software che si proponga come semplice eserciziario su video non è di grande utilità ma un software che offra situazioni problematiche e permetta all'alunno di continuare in autonomia il lavoro fatto con l'insegnante potrà davvero esser utilizzato per far acquisire apprendimenti significativi da parte degli alunni e non si sostituirà al lavoro del docente che, come guida esperta, promuoverà nei discenti le abilità adatte.

Cornice teorica

L'ergonomia in generale si occupa dei principi che regolano le interazioni tra individui e strumenti, l'ergonomia didattica si concentra in particolare sulle dinamiche che si attivano nell'utilizzo di strumenti e tecnologie di tipo didattico.

Pur mirando ad alleggerire il carico cognitivo, deve anche essere in grado di innescare fenomeni di interiorizzazione di quei meccanismi che inizialmente sono acquisiti solo in modalità percettivo-motoria.

Le tecnologie da sole non hanno la capacità di migliorare i processi di apprendimento, ma anzi, se male implementate ed utilizzate, possono sottrarre attenzione e risultare dispersive.

Nella nostra analisi di software e interfacce valuteremo quindi in quale misura sono in grado di restare sullo sfondo, invisibili, diventando una parte naturale del compito (Norman, 1993).

Vedremo se l'alleggerimento risulta fine a se stesso oppure se apre la strada a nuove forme di apprendimento che in ogni caso richiedono coinvolgimento attentivo e comportano impegno e fatica mentale, infatti non si può scendere al di sotto di una cerca soglia di carico didattico: un certo sforzo, una certa "tensione cognitiva" è indispensabile all'apprendimento. (Calvani, 2001)

La costruzione della conoscenza è un processo complesso che non può essere esplorato al di fuori del contesto socio-culturale entro il quale è inserito.

Alcuni autori, basandosi sul lavoro di Vygotsky, asseriscono che l'azione umana, e del docente in particolare, è sempre mediata da mezzi come il linguaggio ed altri strumenti che modellano in maniera fondamentale l'azione didattica.[4]

D'altro canto, altri autori pensano che non sia possibile utilizzare in modo troppo restrittivo la visione di Vygotsky nel campo specifico della didattica della matematica. Sostengono infatti che la teoria Vygotskiana, o quanto meno alcune sue interpretazioni, possa privilegiare il linguaggio a detrimento di altre forme di interazione intellettuale e di attività concrete. [5]

---

[4] Wertsch, J.V., *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action*, Harvard University Press, 1991
[5] Confrey, J. (1995a), *A Theory of Intellectual Development: part II*. For the Learning of Mathematics. 15 (1) 38-48.

Se ci riferiamo al caso dei Dynamic Geometry Software, figure e comandi del software possono essere considerati come segni esterni della teoria geometrica e in quanto tali rientrano nella definizione di Vygotsky di mediatori semiotici.[6]

A questo proposito può essere interessante ricordare la distinzione, proposta da Pea (1987)[7] tra amplificatori e riorganizzatori quando ci riferisce a strumenti tecnologici.

Secondo Pea gli strumenti tecnologici non sono solo amplificatori culturali, ma cambiano l'organizzazione funzionale del rapporto tra uomo e lavoro. Il lavoro è svolto più celermente e cambiano anche le azioni necessarie a completare il compito. In altri termini, se ci riferiamo al rapporto studente – computer, le tecnologie cognitive non solo amplificano le capacità mentali ma le riorganizzano e le ristrutturano.

Per questa ragione è importante studiare non solo il modo con cui le tecnologie, segnatamente i DGS, amplificano il segnale, ma soprattutto come influenzano il cambiamento di atteggiamento mentale, come possono riorganizzare i processi cognitivi.

Per poter meglio analizzare le *affordance* [8] degli strumenti analizzati conviene ricordare la distinzione tra artefatto e strumento. Il primo è quel particolare oggetto con le sue proprie caratteristiche disegnate e progettate per assolvere un particolare compito, il secondo comprende le modalità elaborate da un particolare utente nell'utilizzo di quel particolare artefatto.

Un artefatto diventa uno strumento attraverso un processo di interazione con l'utilizzatore, un percorso lungo il quale lo studente costruisce nuovi significati proprio dall'utilizzo di quello oggetto. Secondo Verillion & Rabardel, (1995) in diversi momenti lo stesso artefatto fornisce diversi strumenti a seconda di come e da chi viene usato.[9]

---

[6] Mariotti, Maria Alessandra (2000), *Introduction to proof: the mediation of a dynamic Software environment*, Educational Studies in Mathematics, Volume - Volume 44, Issue - 1, pp25-53

[7] Pea, R. D. (1987). *Cognitive Technologies for Mathematics Education*. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 89-122). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

[8] L'*affordance* è l'aspetto fisico di un oggetto che permette all'utilizzatore di dedurne le funzionalità o i meccanismi di funzionamento. Il termine è stato introdotto nel 1966 dallo psicologo James J. Gibson. Più alta è l'*affordance* più sarà automatico ed intuitivo l'utilizzo di un dispositivo o di uno strumento.

[9] Verillion, P., & Rabardel, P. (1995). *Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity.* European Journal of Psychology of Education, 10, 77-101.

Un altro aspetto da prendere in considerazione è il processo di internalizzazione che, secondo Vygotsky, può trasformare artefatti tecnologici in strumenti psicologici che danno forma a nuovi significati.[10] Più precisamente mentre lo studente utilizzando l'artefatto lo vive come strumento capace di assolvere un determinato compito, il docente fornisce i significati allo strumento che diventerà quindi un mediatore semiotico.

Modelli di apprendimento della geometria

Le attività geometriche che analizzeremo si possono inquadrare in alcuni schemi teorici.

Fra gli altri, quello proposto da due ricercatori olandesi, Dina and Pierre van Hiele[11] i quali sostengono che gli alunni procedono nell'apprendimento di concetti geometrici seguendo un percorso strutturato in cinque livelli:

1. visivo (o del riconoscimento): vengono riconosciute le forme (lo studente riconosce il disegno di un rettangolo, ma non ne sa le proprietà)
2. descrittivo (o dell'analisi): lo studente possiede una rete di relazioni tra proprietà delle figure (lo studente conosce le proprietà del rettangolo, ma non lega il rettangolo al quadrato)
3. deduttivo informale (o del confronto): si studiano le relazioni logiche tra le proprietà (lo studente capisce che un quadrato è anche un rettangolo)
4. assiomatico deduttivo (o della deduzione) entro una teoria assiomatica parziale (lo studente dimostra le proprietà del rettangolo legandole a quelle di altre figure)
5. strutturale (del rigore): si mettono in relazione teorie assiomatiche diverse (lo studente riconosce la dipendenza della nozione di rettangolo dal postulato delle parallele).

---

[10] "An interpersonal process is transformed into an intrapersonal one. Every function in the child's cultural development appears twice: first, on the social level, and later, on the individual level; first between people (interpsychological), and then inside the child (intrapsychological). This applies equally to voluntary attention, to logical memory, and to the formation of concepts. All the higher functions originate as actual relations between human individuals" (Vygotsky, 1978, p.57).

[11] Teppo, Anne , *Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited.* , Mathematics Teacher , March 1991, pg 210-221.

Secondo i van Hiele, ad ogni età può essere appropriato operare a uno o più livelli, ma tutti devono essere toccati, senza salti e progressivamente: l'insegnante non deve chiedere ad uno studente di lavorare in un livello se l'allievo non padroneggia i precedenti.

Inoltre propongono altre fasi che dovrebbero aiutare gli studenti nel loro percorso:

Fase 1: Domanda/Risposta

Ad un livello iniziale insegnanti e alunni intrattengono una conversazione relativa agli oggetti di studio. Osservazioni, domande e introduzione di un lessico attinente

Fase 2: : Esplorazione guidata

Gli alunni esplorano l'argomento utilizzando materiali scelti e messi in sequenza dal docente. Queste attività hanno lo scopo di rivelare gradualmente le strutture caratteristiche del livello 2.

Fase 3: Spiegazione

Basandosi sulle esperienze concrete appena affrontate, gli studenti esprimono e confrontano i loro punti di vista e le loro osservazioni relative alle strutture. Il ruolo del docente deve essere minimo, limitarsi solo al controllo di un uso appropriato del lessico geometrico utilizzato. Durante questa fase dovrebbe apparire chiara la gerarchia di relazioni tra i vari oggetti geometrici.

Fase 4: Libera esplorazione

Gli studenti affrontano compiti più complessi, ad esempio problemi che prevedono diverse soluzioni, che sono strutturati in moduli successivi o che rimangano aperti cioè senza una soluzione definita. In questo modo sperimentano in modo autonomo la soluzione di problemi rendendo esplicite le relazioni che incontrano.

Fase 5: Integrazione

Gli studenti sono infine in grado di interiorizzare ed unificare le relazioni apprese in un nuovo ambito di pensiero. Il docente assiste e guida verso la formulazione di una sintesi globale del percorso teorico effettuato.

Relazioni e vincoli

Una delle caratteristiche più interessanti dei DGS come GeoGebra è la possibilità di verificare percettivamente le relazioni e i vincoli tra oggetti. Se si trascina un punto si varia in modo continuo (non discreto) la forma della figura e si osservano come alcune proprietà e relazioni rimangono invariate. Anche il concetto di dipendenza (e indipendenza) è facilmente visualizzabile quando ad esempio muovendo l'estremo di un segmento muoviamo anche la perpendicolare al segmento stesso.

Un altro modo di evidenziare chiaramente la dipendenza tra oggetti si ottiene quando se ne cancella uno, tutti quelli da lui dipendenti spariscono.

Gli studenti che provano a costruire un rettangolo utilizzando un DGS arrivano alla conclusione che una figura geometrica è un insieme di relazioni, anzi percepiscono che esiste una gerarchia di interdipendenze.

In GeoGebra infatti abbiamo tre modalità per disegnare un punto: a) punto libero b) punto intersezione e c) punto su un oggetto. Sullo schermo i tre punti appaiono identici, ma le differenze si evidenziano quando proviamo a trascinarli, ad esempio il punto intersezione non può essere mosso perché è vincolato agli oggetti che lo generano.[12]

Un esempio di relazione si ottiene disegnando la retta parallela ad una altra. Trascinando e ruotando la prima l'alunno si rende conto che la seconda è vincolata dalla relazione che abbiamo creato, quindi anche se il disegno cambia completamente vengono evidenziate le caratteristiche invarianti che legano i due oggetti.

Utilizzando GeoGebra introduciamo il concetto di "validare una figura geometrica" cioè evidenziare la differenza tra disegno e costruzione geometrica.

Ad esempio si chiede a studenti di prima media di lavorare singolarmente e di provare a costruire un quadrato con GeoGebra. Di solito i ragazzi, soprattutto se hanno poca dimestichezza

[12] Jones, K. (1996), *Coming to know about 'dependency' within a dynamic geometry environment*. In: L. Puig and A. Gutiérrez (Eds), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Valencia, Volume 3, pp145-152.

con il DGS, disegnano sullo schermo un quadrilatero e lo aggiustano pazientemente con piccoli spostamenti del mouse in modo che i lati siano pressoché congruenti e che gli angoli siano pressoché retti, dopodiché mostrano all'insegnante con soddisfazione l'opera finita.

A questo punto l'insegnante, passando per le singole postazioni, trascina con il mouse un vertice, deforma la figura e il quadrato scompare: al suo posto rimane un comune quadrilatero.

Questa attività è utile perché aiuta a notare la differenza fra ciò che è e ciò che appare.

Se disegniamo un quadrato ad occhio, cercando di realizzare con precisione delle linee diritte, il risultato è un disegno che percepiamo come quadrato, ma in effetti rappresenta solo la componente figurale del concetto di quadrato.

Tale disegno, per rappresentare effettivamente un quadrato deve anche mantenere quelle caratteristiche che lo definiscono. Si chiede a questo punto ai ragazzi di costruire un quadrato non ad occhio, ma a partire dalle sue proprietà geometriche. La validazione viene effettuata con GeoGebra, attraverso la funzione di trascinamento.

Agli alunni viene quindi chiesto di ipotizzare quali sono le variabili che devono essere vincolate affinché il quadrato rimanga tale, si introduce il concetto di proprietà geometrica.

Avvicinarsi alla dimostrazione geometrica

In una classe prima media io e la collega di sostegno volevamo proporre il problema di individuare l'ortocentro dei triangoli.

Metà della classe ha affrontato le consegne con l'uso di riga e compasso "reali" disegnando su fogli di carta, l'altra metà ha risolto il problema utilizzando Cabrì in aula informatica, la lezione successiva le parti si sono invertite per consentire a tutti di rendersi conto personalmente delle differenze presenti nei due casi.

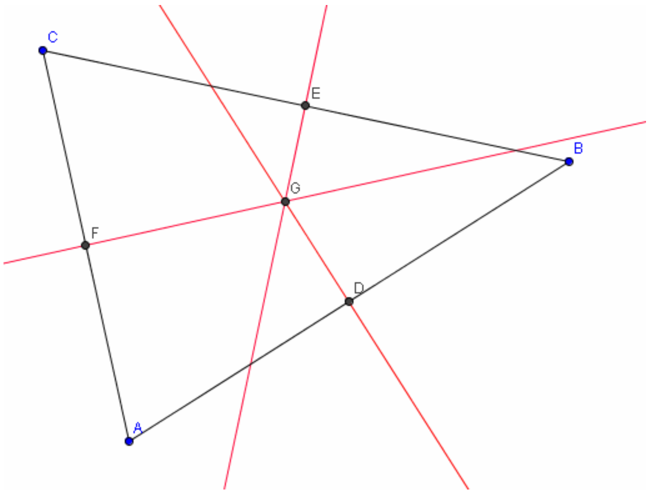
L'aula di informatica consente l'utilizzo di ogni macchina da parte di due studenti, il software viene presentato sommariamente e si consente per qualche minuto l'esplorazione libera dei menu che sono autoesplicativi (punto, segmento, retta, parallela, perpendicolare) invitandoli a disegnare qualcosa solo per impratichirsi con l'interfaccia.

Successivamente vengono date loro delle consegne precise:

- disegnare un triangolo a piacere

- disegnare le rette passanti per il punto medio e perpendicolari ai tre lati (assi)

- verificare che spostando i vertici del triangolo le rette che contengo le tre rette si intersecano sempre nello stesso punto



La possibilità di deformare il triangolo semplicemente trascinando il vertice facilità l'interiorizzazione del concetto chiave di invarianza geometrica. Se i ragazzi leggono: "le rette perpendicolari ai tre lati di un triangolo si incontrano nello stesso punto" possono verificarlo disegnando un solo triangolo e le tre rette, ma utilizzando il DGS e muovendo e deformando il triangolo vedono che effettivamente ciò è vero in "molti" casi da cui possono cominciare ad inferire la validità dell'enunciato.[13]

Alle medie inferiori I ragazzi non hanno ancora gli strumenti logici per costruire una vera e propria dimostrazione, però utilizzando il DGS possono provare che:

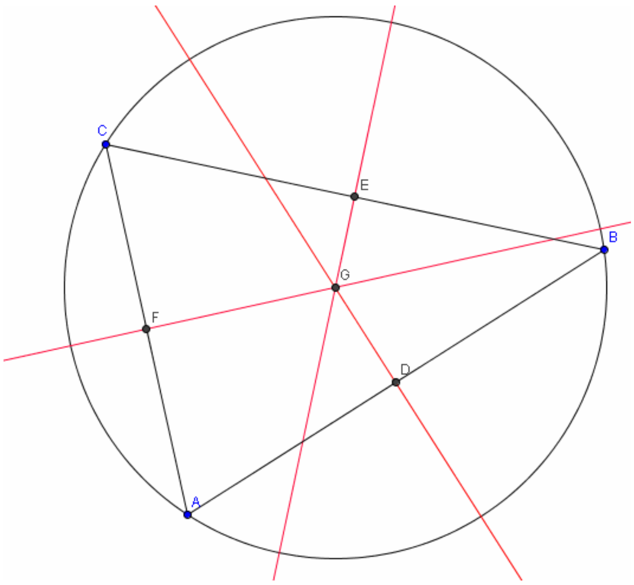
- la proprietà vale in "moltissimi" casi

- non si riesce a costruire un caso che neghi la proprietà

[13] Jones, Keith (2005) *The shaping of student knowledge with dynamic geometry software*. In, Virtual Learning, the Computer Assisted Learning Conference 2005 (CAL05), Bristol, UK, 4-6 April 2005. , 10pp.

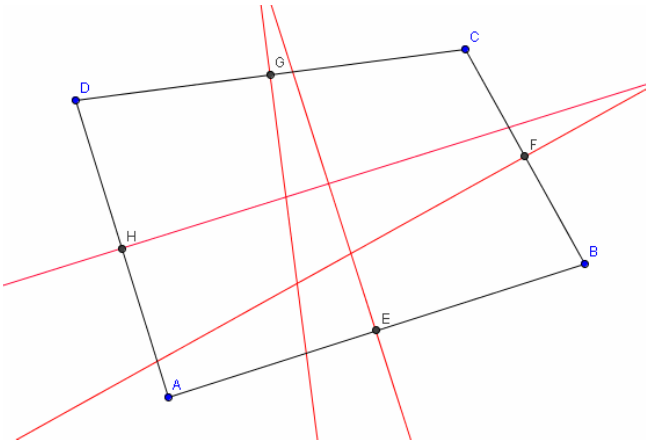
Altre osservazioni portano gli studenti a verificare che il punto di intersezione, essendo sugli assi di tutti e tre i lati, è equidistante ai tre vertici. Anche questa verifica può essere condotta con lo strumento “misura” che riporta le lunghezze dei segmenti.

Essendo il punto G equidistante sarà possibile costruire la circonferenza circoscritta:



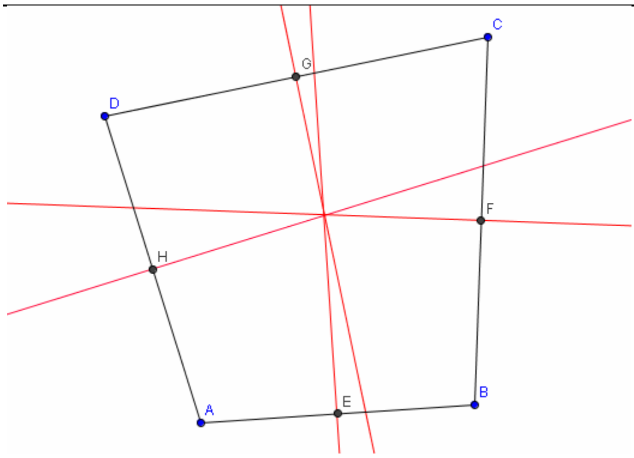
L’esempio del triangolo può essere utilmente ampliato al caso del quadrilatero.

Agli studenti viene chiesto di costruire gli assi (rette perpendicolari passanti per il punto medio) dei lati di un quadrilatero e di esplorare, utilizzando la funzione di trascinamento, cosa accade alla figura formata dalle rette.

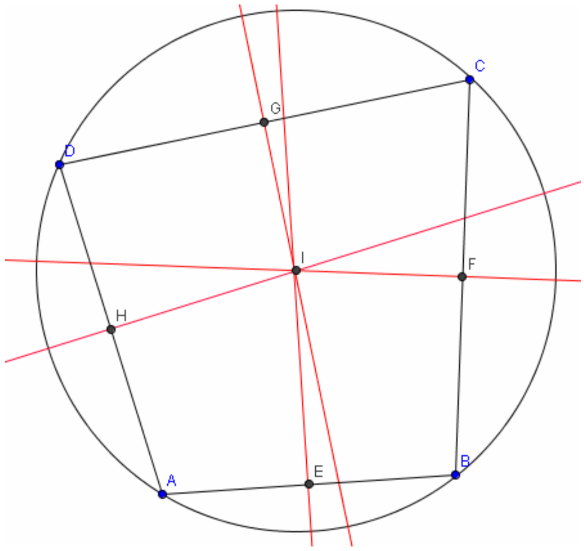


Prima osservazione: mentre nel triangolo gli assi si intersecano sempre in un unico punto, nel quadrilatero ciò non accade, perché?

Per tentativi spostano i vertici del quadrilatero per fare in modo che le quattro rette si incontrino in un unico punto. Domanda: quando questo accade? Che regolarità osservo?



Anche nel caso del quadrilatero gli studenti possono infine verificare che il punto di intersezione è il centro della circonferenza circoscritta.



L'uso del trascinamento permette di mantenere invariate alcune proprietà (la perpendicolarità delle rette rispetto ai lati) e di modificarne altre.

Esempi di invarianza

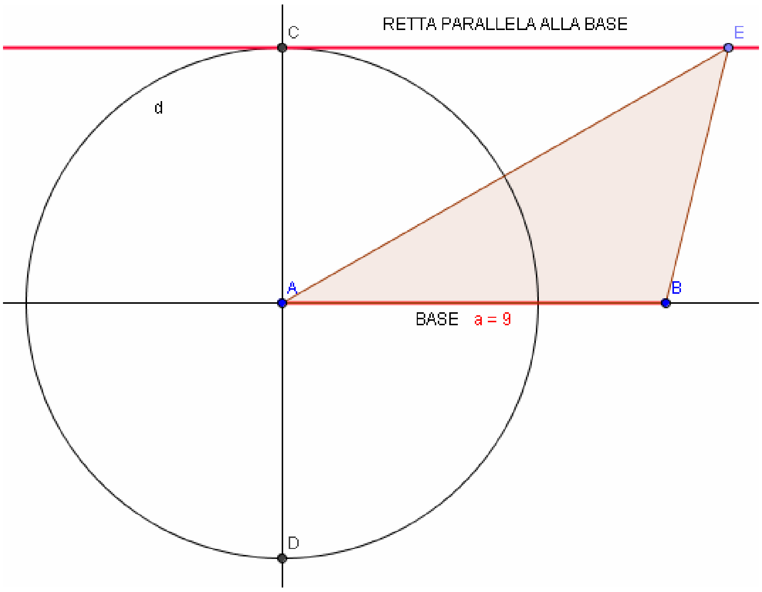
Un altro esempio proposto a studenti di terza media è questa costruzione che prevede numerosi passaggi.

La consegna è: "costruire tutti i triangoli di data base e di data altezza verificando che l'area rimane invariata."

Si può iniziare lasciando gli studenti liberi di esplorare induttivamente,[14] l'insegnante interviene per "validare" la costruzione provando a trascinare i punti per verificare se i vincoli (uguale altezza e uguale base) sono rispettati.

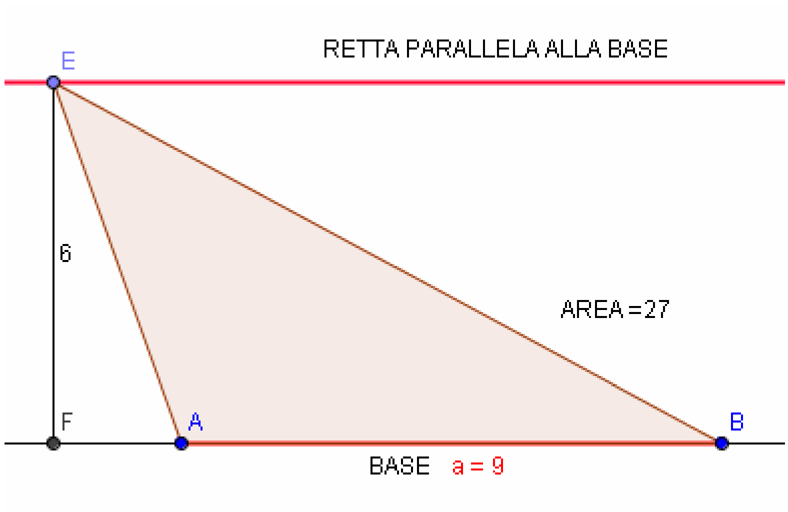
Questo è uno dei molti percorsi possibili:

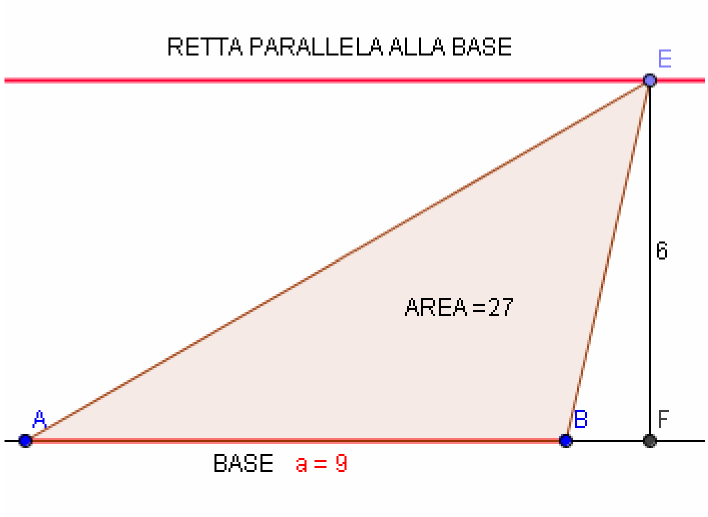
- Si parte dalla base di lunghezza data, si costruisce il luogo dei punti equidistanti alla base data (retta parallela).



- Si crea un punto appartenente alla retta parallela (vincolato a scorrere su di essa, quindi sempre equidistante alla base).
- Si costruisce il triangolo unendo i tre punti
- Si visualizza il valore dell'area
- Si verifica, facendo scorrere il punto E, che l'area rimane costante.

[14] Arzarello, Olivero F, Robutti O. & Paola D: (1999), *I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, v. 22B, 309–338.





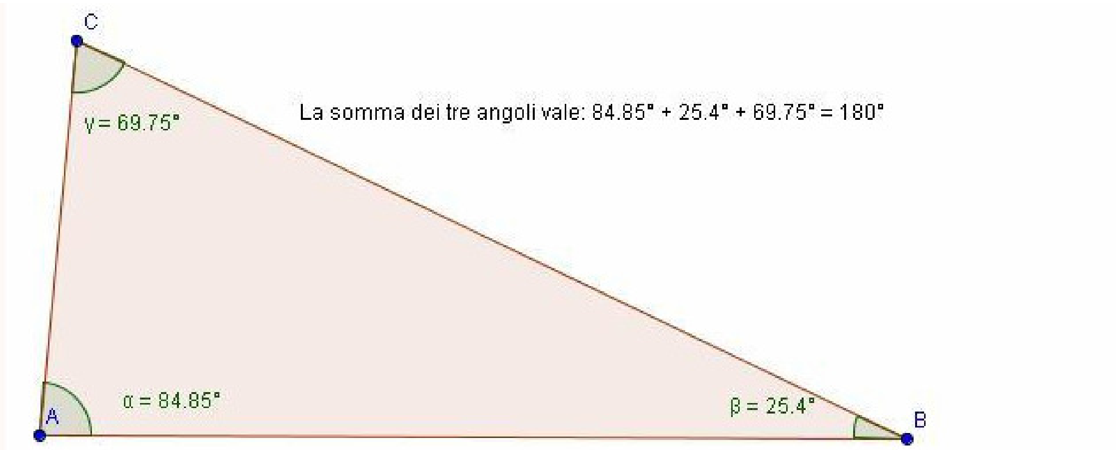
Altri esempi

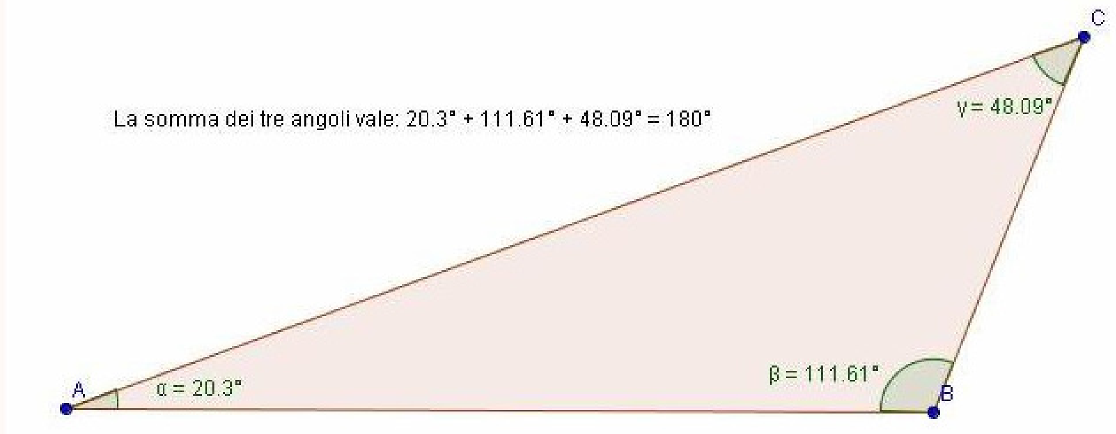
Verificare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°.

I ragazzi disegnano il triangolo con lo strumento poligono, aggiungono le etichette e i relativi valori dei tre angoli,aggiungono la formula che evidenzia come, pur cambiando i tre valori, la somma rimanga costante e valga 180°.

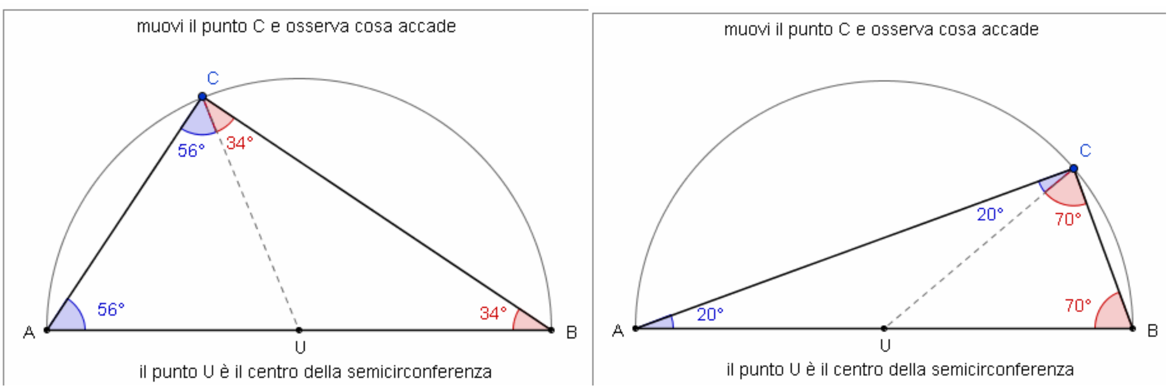
Dallo stupore nasce l'esigenza di dimostrare, gli allievi possono giocare a deformare il triangolo trascinandone i vertici e verificare che qualunque tipo di triangolo (ottusangolo, retto, acutangolo, isoscele, scaleno ecc.) avrà sempre come somma un angolo piatto.

Allego un paio di immagini che, essendo statiche, danno solo un'idea delle possibilità dinamiche del software.



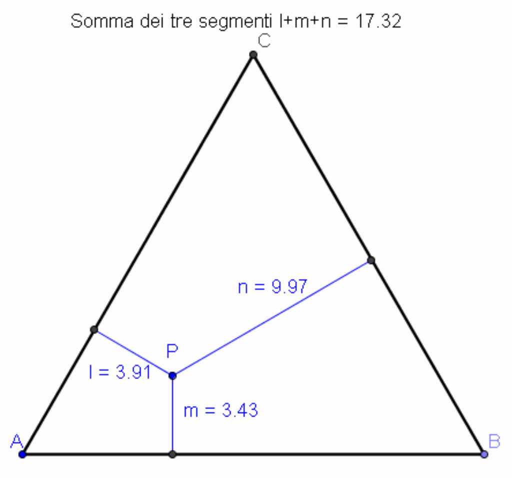


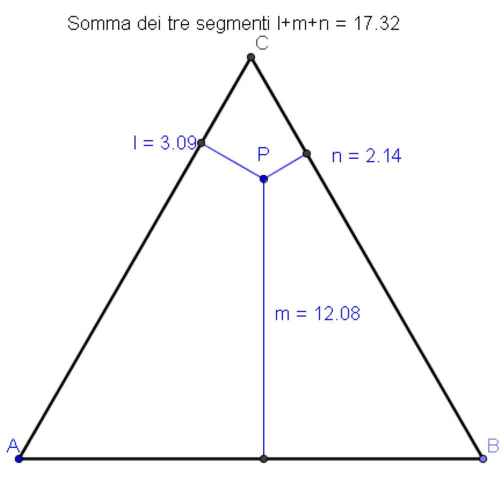
L'esempio seguente mostra altre invarianti geometriche, lo studente valida la figura provando a trascinare il punto C e osserva cosa accade agli angoli del triangolo inscritto in una semicirconferenza, in seguito prova a ripercorrere i passaggi che portano alla costruzione dinamica rendendosi conto di quali siano gli oggetti liberi e quali quelli dipendenti.



Infine un paio di esempi che si possono proporre ad alunni di terza media o prima superiore.

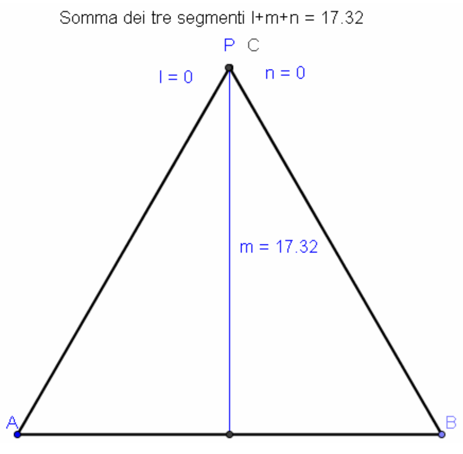
Dato un punto P interno ad un triangolo equilatero, cosa si può dire della somma delle distanze del punto P con i tre lati? Gli studenti, utilizzando GeoGebra, dovranno costruire il triangolo, scegliere un punto P a piacere, disegnare le tre distanze l, m, n e calcolare la somma l+m+n. In seguito sposteranno il punto P e calcoleranno nuovamente la somma l+m+n.





Gli studenti si accorgono facilmente che la somma dei tre segmenti rimane costante.

Con un passaggio successivo, spostando P in modo da farlo coincidere con C, noteranno anche che questa somma è uguale all'altezza del triangolo equilatero.



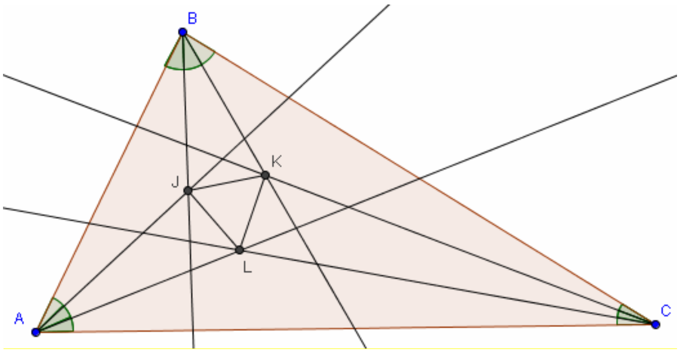
Proporre questo problema rende gli alunni consapevoli delle potenzialità di questo DGS: fornisce immediate misure di segmenti e soprattutto mostra l'invarianza della somma semplicemente trascinando il punto P all'interno del triangolo.

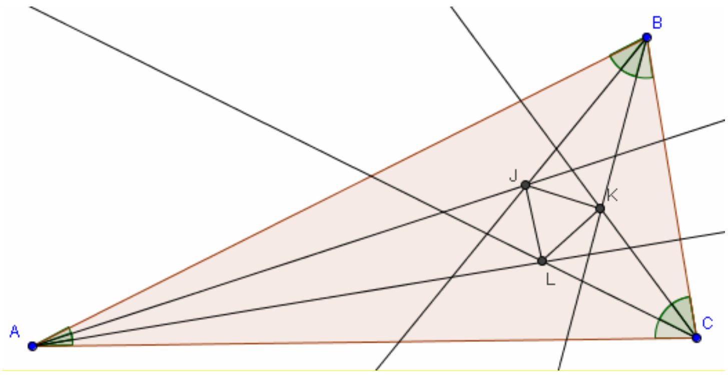
Il secondo esempio riguarda una elegante proprietà comune a tutti i triangoli. [15]

È interessante proporre agli studenti soltanto la costruzione e lasciare a loro il piacere della scoperta della proprietà.

"*Trisecare gli angoli interni di un triangolo ABC. Unire i tre punti JKL, intersezione delle trisecanti adiacenti. Osservare che figura si ottiene.*"

Trovare la proprietà non significa dimostrarla, però è probabile e auspicabile che la naturale curiosità li spinga a porsi la domanda: "*perché accade?*".





Saper rispondere a quella domanda significa avviarsi alla dimostrazione rigorosa, uno dei compiti più ardui non solo per gli studenti, ma per gli stessi insegnanti. [16] Ci vogliono gli strumenti concettuali, conoscere gli assiomi di partenza, ma soprattutto occorre essere motivati.

Per capire la fondamentale differenza tra l'evidenza visuale, fornita dai DGS, e la dimostrazione di un teorema si può pensare a questo esempio. I Babilonesi conoscevano il teorema di Pitagora (o meglio la relativa proprietà dei triangoli rettangoli) più di tremila anni fa, ma lo

[15] Teorema di Morley. In un triangolo si trisechino gli angoli interni. I tre punti di intersezione delle trisecanti adiacenti formano un triangolo equilatero.
[16] Marrades, R. and Guitiérrez, Á. (2000). *Proofs produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment*. Educational Studies in Mathematics 44(1-2): 87-125.

accettavano semplicemente come un fatto insito nella natura delle cose, senza vedere la necessità di dimostrarlo, mancava la domanda fondamentale: "*Perché?*". La loro matematica non andò oltre una semplice collezione di regole e formule computazionali, si dovette attendere che un'altra civiltà iniziasse a chiedersi *perché* certe affermazioni fossero vere.

Per questo motivo la prova e la dimostrazione sono elementi fondamentali nel curricolo matematico. Dimostrare qualcosa significa interiorizzarlo, farlo proprio: "*Esplorare porta alla scoperta, la prova porta alla conferma.*"[17]

[17] Hanna, G. (2000). *Proof, Explanation and Exploration: An Overview*. Educational Studies in Mathematics 44(1-2): 5-23.

Attività di *problem solving*

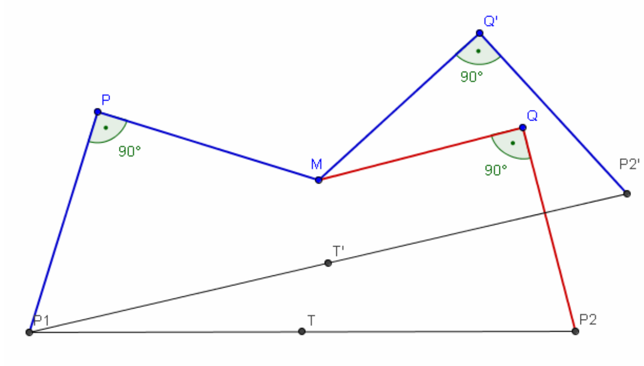
Il seguente esempio è stato proposto ad una quarta classe di liceo scientifico [18] che, oltre alle verifiche visivo-percettive, è riuscita anche a produrre una dimostrazione rigorosa dell'assunto. Limitandoci alla costruzione ed alla verifica all'interno dell'ambiente del DGS, anche ragazzi di terza media sono in grado di "validare", con il *dragging*, la costruzione e possono dare una risposta al quesito.[19]

È stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni: vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola, che ha un solo approdo, troverai un melo M, un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2. Ariele, giunto sull'isola del tesoro, ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

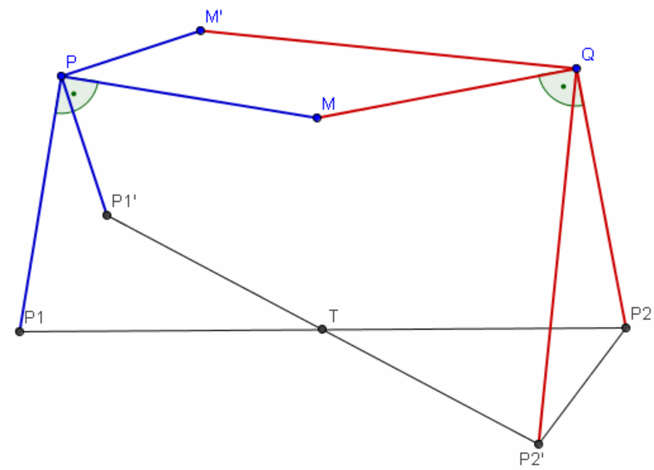
Dopo aver costruito una figura che verifica le condizioni descritte nel testo del problema, gli studenti provano a muovere con il mouse i punti P, Q, M. Osservano che movendo P e Q, anche T si muove, mentre se si muove M, allora T rimane fermo. Nella prima figura vediamo cosa accade se proviamo a muovere solo Q in Q'. Notiamo subito che anche T varia la sua posizione in T':

[18] Paola, D.: 2001, *L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche*, in E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti (editors), Conferenze e Seminari Mathesis 2000-2001, 131–140.

[19] Riformulazione di un problema presentato e risolto da George Gamow nel libro *Uno, due tre … infinito*, pubblicato in Italia nel 1952 da Arnoldo Mondadori.



L'immagine seguente mostra cosa accade muovendo M in M': in tal caso, anche se P1 e P2 si spostano, rispettivamente in P1' e P2', T rimane nella stessa posizione.:



GeoGebra consente, grazie alla funzione di *dragging*, di rendersi conto che se P e Q si muovono, allora anche T si muove, mentre se M si muove, T rimane al suo posto. Questa considerazione deriva solo da una verifica a livello visivo-percettivo eppure è fortemente convincente: gli studenti "validano" la costruzione perché vedono che anche muovendo M la nuova costruzione che si ottiene rispetta ancora le condizioni iniziali del problema. Una successiva osservazione permette di verificare le relazioni che legano P, Q e M con il punto T, quindi la validazione tramite trascinamento permette di asserire che T dipende solo da P e Q, ma non da M.

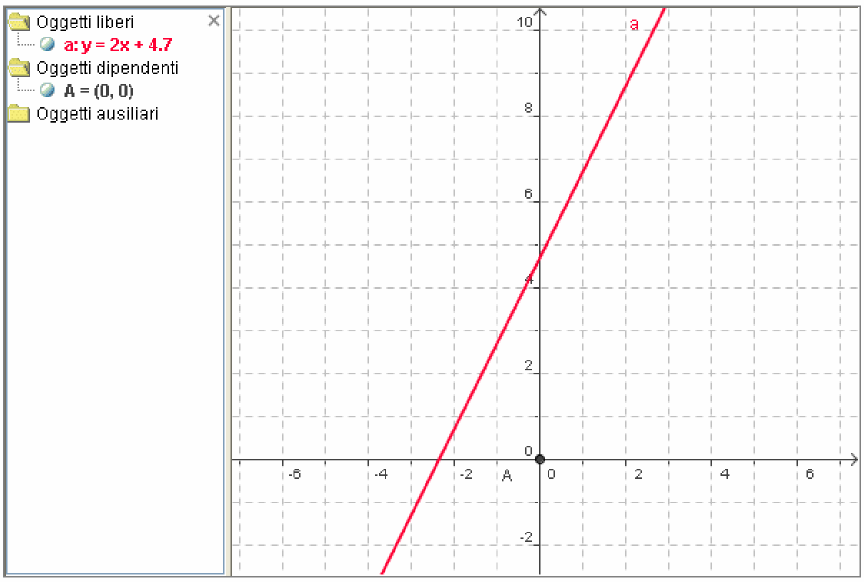
Il problema può essere risolto: Ariele troverà il tesoro. Anche in questo esempio è possibile apprezzare appieno l'operazione di validazione dinamica interagendo con una immagine online: http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/ariele.html

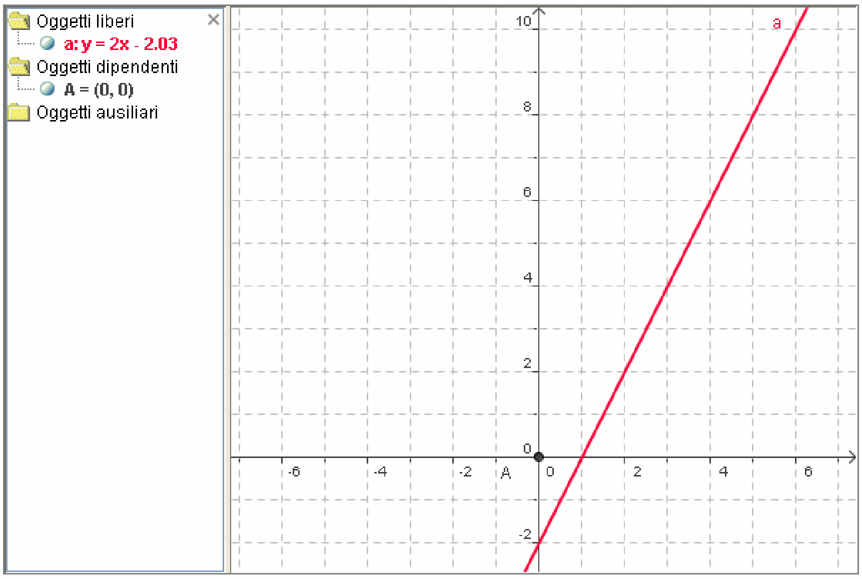
Dalla Geometria all'Algebra

Uno dei punti di forza di GeoGebra consiste nella finestra "Algebra" che può essere affiancata a quella "Geometria" (da qui la crasi: Geo~~metria-Al~~gebra = Geogebra).

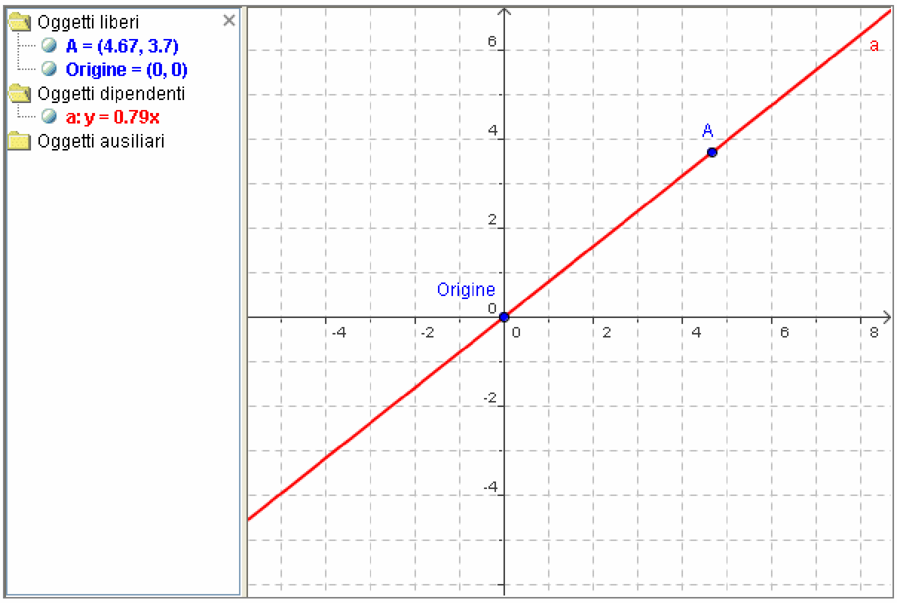
In questa finestra si possono osservare i cambiamenti che avvengono nelle formule algebriche allorché viene modificata la figura da esse generata. Questo procedimento è risultato utilissimo per fornire un significato a questo strumento che diventa quindi un vero e proprio mediatore semiotico, lo studente interiorizza e abbina mentalmente il passaggio concettuale che collega una variabile presente in una formula con l'aspetto grafico corrispondente.

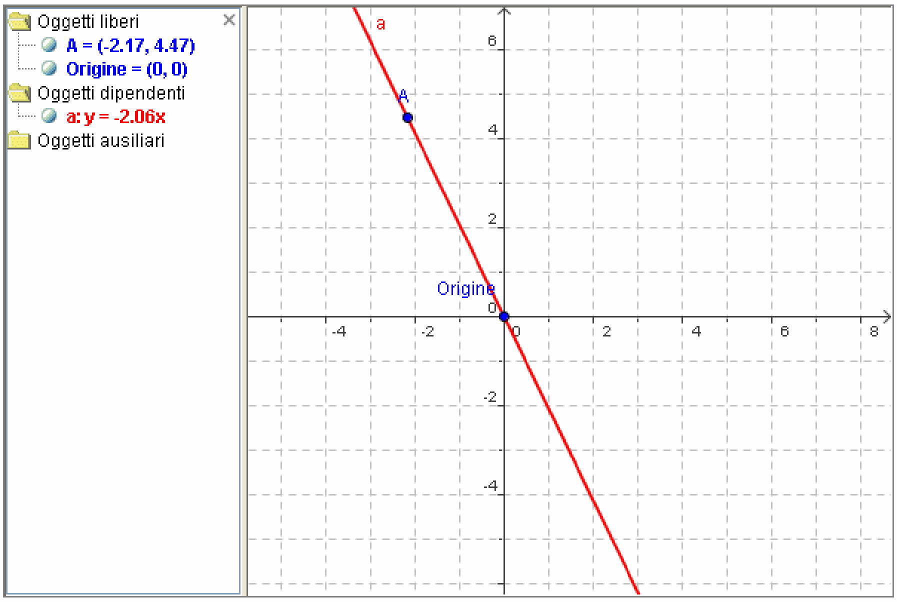
Ad esempio ho provato ad utilizzare la potenza dell'abbinamento funzione ⇔ grafico per visualizzare il cambiamento del coefficiente angolare nel caso di rette parallele e di rette che ruotano attorno all'origine degli assi. Il poter trascinare la retta e osservare contemporaneamente cosa accade alla relativa equazione convince gli studenti del legame tra le due variabili (una variabile numerica ed una variabile grafica). In entrambe le immagini l'equazione in rosso conserva invariato il coefficiente angolare 2.





Viceversa nelle immagini seguenti le rette sono vincolate al punto di origine degli assi. Ruotandole, si osserva la variazione del coefficiente angolare, nell'esempio da 0,79 a -2,6.





Questi link visualizzano degli applet Java interattivi realizzati utilizzando GeoGebra, attendere qualche istante perché si carichino.

retta che trasla parallelamente: http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/retta.html

retta che ruota attorno all'origine: http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/ruota.html

ortocentro: http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/ortocentro.html

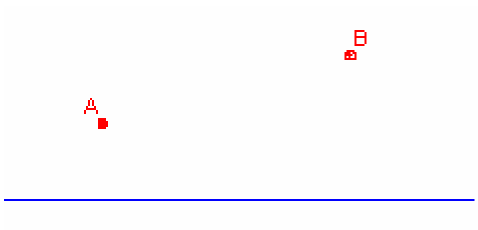
---

Problema di Erone

Un ulteriore esempio delle potenzialità dell'accostamento tra funzioni algebriche e rappresentazioni grafiche dinamiche. Il procedimento è stato scomposto in sei fasi.

Prima fase:

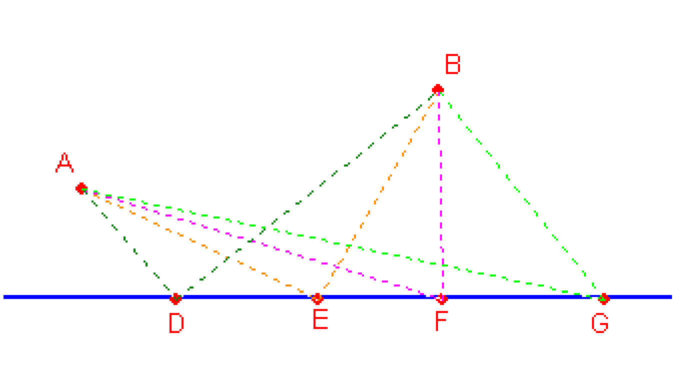
L'insegnante si rivolge al gruppo classe e illustra il problema:



" Una persona che si trova in una posizione A deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto B dalla stessa parte di A rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo."[20]

Seconda fase:

Gli studenti, dopo esseri riuniti in piccoli gruppi, proveranno per tentativi e misureranno con il righello le somme delle coppie di segmenti: AD+DB AE+EB AF+FB AG+GB



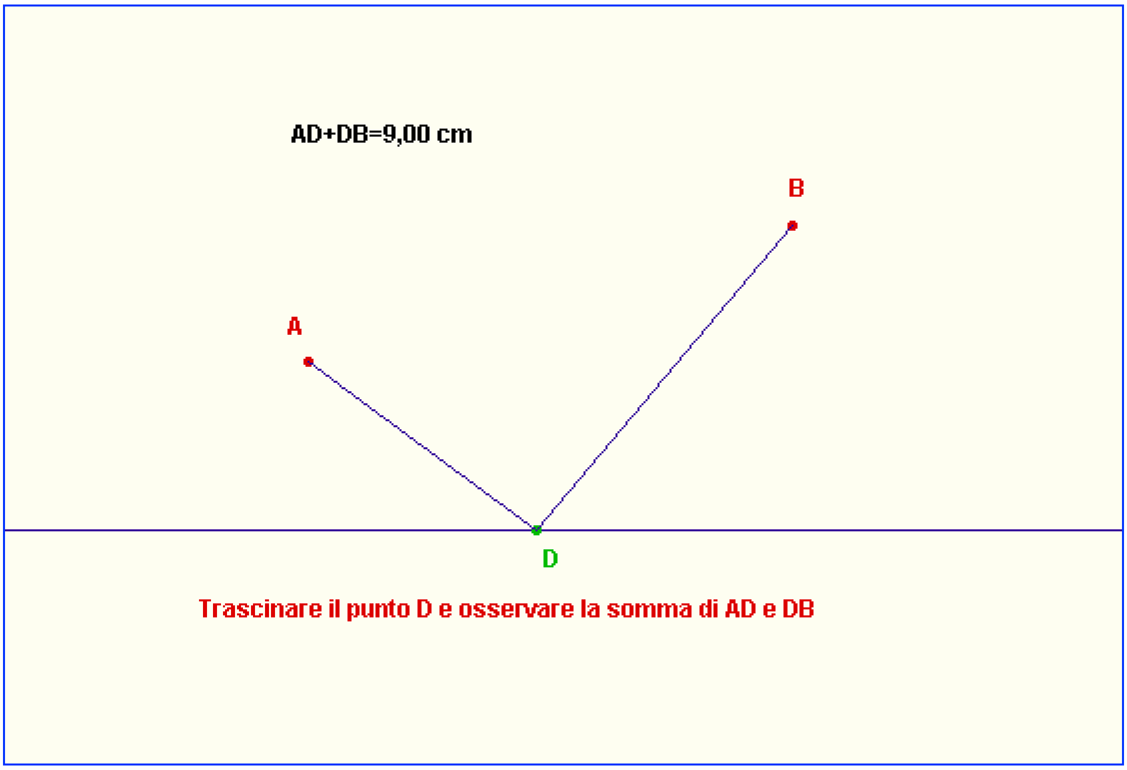
[20] Il problema di Erone è quello di determinare il percorso minimo che si deve compiere per andare da un punto A ad un punto B dovendo toccare una certa retta r esterna ai due punti. Questo equivale a cercare un punto D sulla retta che minimizza la somma delle distanze AD+BD.

Terza fase:

I dati raccolti verranno ordinati in una tabella e si cercherà la soluzione trovata con metodo euristico. Ogni gruppo fornirà la propria soluzione che ovviamente dipende dalla posizione dei punti sulla retta.

Quarta fase:

A questo punto si potrà utilizzare il software di geometria dinamica, ad esempio Cabrì o GeoGebra, per calcolare in modo dinamico la variazione della lunghezza:

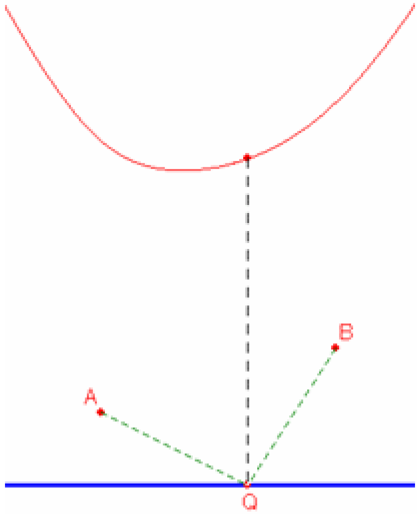


(naturalmente l'immagine qui sopra non è dinamica come lo sarebbe se fosse visualizzata nell'ambiente che l'ha generata o come si trova pubblicata online:

http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/sommasegmenti.html)

Quinta fase:

Dopo aver verificato l'andamento della lunghezza in base al movimento del punto D vincolato alla retta, gli studenti possono utilizzare gli strumenti "traccia" e "luogo" di Cabrì per visualizzare la curva che corrisponde a questa variazione:



(la costruzione dinamica interattiva è qui:

http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/sommasegmenti.html)

In questo modo la congettura che esista almeno un punto di minimo è visivamente evidente, i ragazzi imparano ad interpretare le informazioni fornite dal grafico e verificano le potenzialità dello strumento di geometria dinamica.

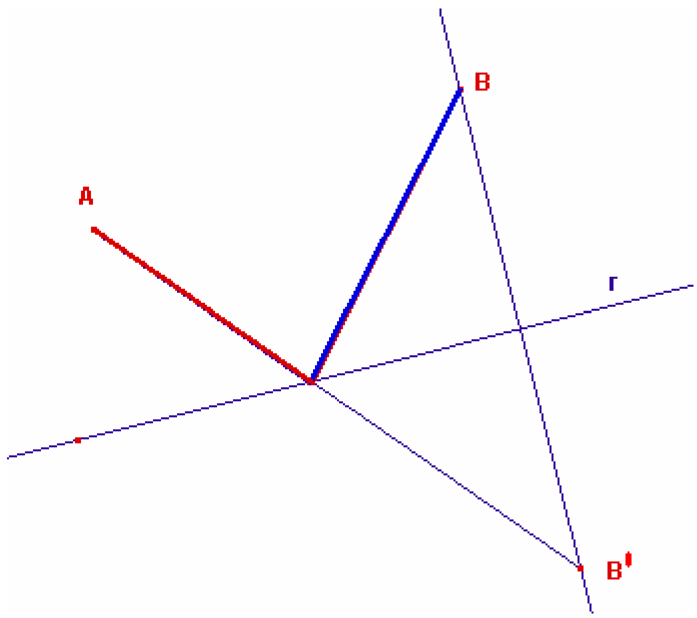
Sesta fase:

Si ripropone il problema in questi termini:

"Se la fattoria stesse dall'altra parte del ruscello in un punto B' e non ci fossero problemi di attraversamento del ruscello, quale sarebbe il cammino più breve?"

Ovviamente gli studenti direbbero che il cammino più breve è il segmento AB'

Se adesso si sovrappone la seconda soluzione alla prima gli studenti potrebbero intuire che la soluzione si può trovare in modo semplice ed elegante osservando che B è simmetrico a B' rispetto alla retta/ruscello:



Infine gli studenti potrebbero riportare il tutto in Cabrì (o GeoGebra) per verificare che le ipotesi avanzate sono esatte.

Qui c'è Applet Java Cabrì Dinamico: http://lnx.sinapsi.org/geometria/geogebra/erone.html

Manipolare oggetti tridimensionali

Con l'avvento dei DGS l'insegnamento della geometria e della dimostrazione dei teoremi ha visto una fase di rinnovato interesse. [21] Molte scuole, europee e non solo, utilizzano con successo software di geometria dinamica sfruttando appieno le caratteristiche interattive e manipolative di tali strumenti. [22] I DGS però rimangono limitati alle figure del piano o al massimo alla rappresentazione di oggetti tridimensionali sul piano. Mancando di profondità, non è possibile ruotare o manipolare gli oggetti tridimensionali rappresentati.

Oltre ai DGS ho proposto agli studenti delle medie inferiori anche alcuni software che permettono la costruzione, in pochi e semplici passaggi, di figure geometriche tridimensionali.

Inizialmente ho utilizzato AutoCAD, più recentemente ho provato Cabrì 3D, ma entrambi non mi hanno soddisfatto del tutto per vari motivi: il primo (AutoCad) è un software commerciale

[21] Hanna, G. (2000). *Proof, explanation and exploration: an overview*. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 5-23.
[22] Jones, K. (2000). *Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations*, Educational Studies in Mathematics, 44(1 &2), 55-85.

(fra l'altro molto costoso) che ha una interfaccia sovraccarica di pulsanti e opzioni (interazione dispersiva) e pur essendo molto efficace nella presentazione degli oggetti (rotazione, ridimensionamento, deformazione) non lo è altrettanto quando si tratta di lasciar costruire gli oggetti agli studenti (comandi poco intuitivi, utilizzo di termini poco comuni come estrusione, ecc.).

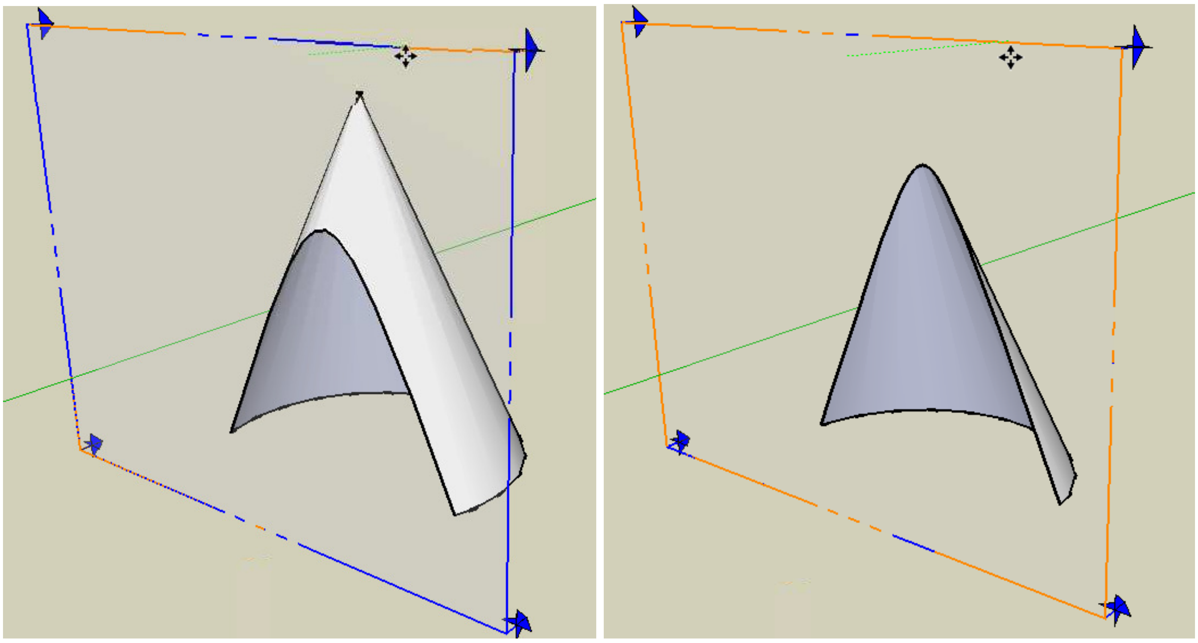
Per quanto riguarda Cabrì 3D, pur essendo progettato come software destinato a scuole e studenti, ha degli aspetti vicarianti (interazione disabilitante) che non mi convincono, mi spiego con un esempio: per costruire un cono si parte dal pulsante che si chiama proprio "cono" saltando a pie' pari la costruzione che a mio parere dovrebbe derivare o dalla rotazione di un triangolo oppure dalla deformazione di un cilindro, inoltre ho verificato che l'interfaccia ha delle difficoltà di interpretazione iniziale che rendono l'approccio meno intuitivo.

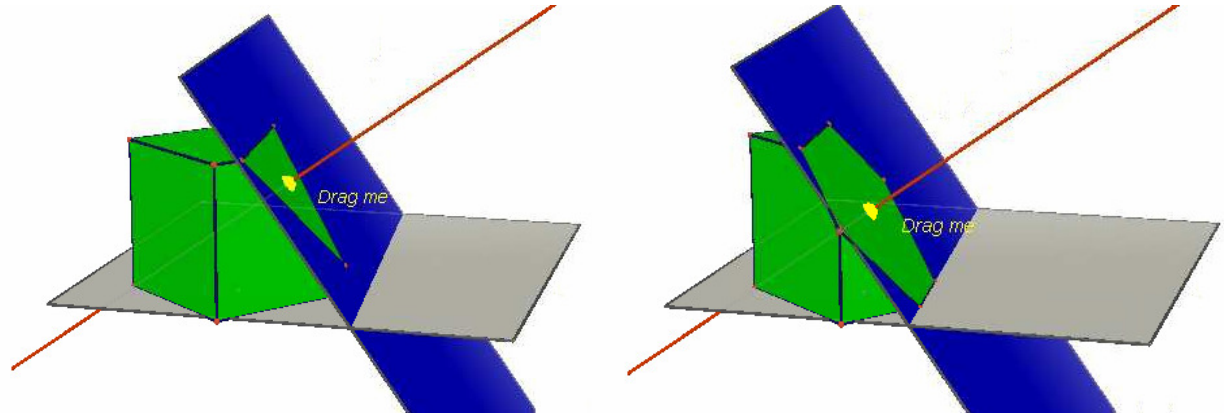
La mia scelta è infine caduta su un *modelling 3D* che ricalca la potenza di AutoCAD pur essendo estremamente più leggero (in termini di Megabyte) e in versione gratuita: SketchUp. (http://sketchup.google.com/)

Sketchup non è nato per scopi didattici, ma la sua semplicità d'uso è stata molto apprezzata dai miei studenti.

La possibilità di ruotare nello spazio gli oggetti appena creati, con una modalità analoga al dragging degli altri DGS verificandone quindi la consistenza spaziale, è uno dei vantaggi principali di questo tipo di software.

Un'altra potenzialità che ho avuto modo di verificare è quella di sezionare gli oggetti con un piano. In tal modo, trascinando con il mouse il piano, si visualizzano le diverse forme ottenute che possono essere curve coniche nel caso del cono o inaspettati esagoni nel caso del cubo.





Interiorizzare le abilità di visualizzazione di figure a tre dimensioni usando solo gesso e lavagna oppure un DGS è un processo complicato e che richiede molto tempo.

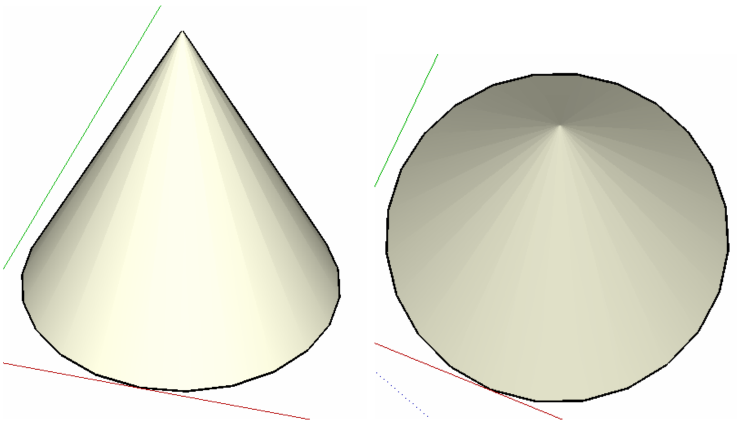
Utilizzare un software come SketchUp significa offrire un micromondo dinamico che permette agli studenti di costruire, osservare e manipolare oggetti tridimensionali nello spazio. Questo approccio soddisfa la prospettiva costruttivista che sostiene come l'apprendimento sia una costruzione raggiunta disegnando e costruendo artefatti i quali acquistano un significato personale quando vengono utilizzati come strumenti. [23]

---

[23] Kafai, Y. B. & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Soddisfa anche la prospettiva semiotica relativa alla matematica come costruttore di significato, ogni singolo segno (diagramma, icona, simbolo) è una rappresentazione dell'oggetto o del concetto per cui vanno incoraggiate rappresentazioni multiple della conoscenza.[24]

Gli studenti che affrontano lo studio della geometria tridimensionale devono acquisire e interiorizzare un insieme di abilità visive che consentano la costruzione mentale del problema da risolvere. Fra queste: la "costanza percettiva", vale a dire la capacità di percepire come alcune proprietà dell'oggetto non dipendano dal colore, dalla rugosità o dalla posizione; la "rotazione mentale", essere in grado di produrre immagini mentali dinamiche; la "percezione di posizioni spaziali", capacità di rapportare oggetti o immagini mentali alla propria posizione nello spazio; la "discriminazione spaziale", saper confrontare oggetti od immagini mentali per rilevare le analogie e le differenze.[25]



La possibilità di visualizzare l'oggetto da diversi punti di vista aiuta gli studenti a costruirsi l'immagine con gli "occhi della mente", anzi la possibilità di muovere l'immagine permette la creazione di innumerevoli immagini mentali, molte di più di quelle ottenute osservando immagini statiche su un libro di testo.[26]

---

[24] Yeh, A., & Nason, R. (2004). *Towards a semiotic framework for using technology in mathematics education: the case of learning 3D geometry.* Paper presented at the International Conference on Computers in Education.
[25] Dreyfus, T. (1991). *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15 conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol 1, pp. 33-48). Genova: University of Genova.
[26] Presmeg, N. (1986). *Visualization in high school mathematics*. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46.

Conclusioni

La geometria euclidea viene costruita attraverso disegni realizzati con l'utilizzo di due soli artefatti: la riga e il compasso.

L'ambiente di apprendimento rappresentato dai DGS esaminati permette la costruzione di figure geometriche utilizzando comandi che si rifanno agli assiomi di Euclide e che ripropongono l'uso di riga e compasso amplificando notevolmente le potenzialità di questi strumenti. La principale caratteristica di questi software è la possibilità di costruire figure geometriche che non sono statiche, bensì possono essere manipolate dinamicamente trascinando vertici, ruotando lati, modificando angoli.

Quando gli studenti sono posti di fronte ad un artefatto come GeoGebra iniziano spontaneamente a disegnare figure geometriche utilizzando gli strumenti che riconoscono tra i menù a discesa. Solo in seguito sperimentano la funzione di trascinamento che inizialmente può essere un elemento di distrazione, infatti non sono abituati a poter muovere, trascinare e deformare figure disegnate con la matita sul foglio di carta.

Si può quindi ipotizzare che gli studenti, prima di poter usare in modo proficuo l'artefatto, abbiano bisogno di interiorizzare questa particolare funzione che rende le figure geometriche dinamiche.

In una fase successiva gli alunni sperimentano i vincoli e le relazioni che limitano il movimento dei punti e delle figure in genere. In tal modo vengono interiorizzate le diverse modalità di *dragging* che quindi non è più solo un modo per giocare a deformare, ma acquisisce un significato utile alla validazione delle figure costruite.

Nella sperimentazione in classe si è notato che l'uso dei DGS non garantisce il passaggio concettuale tra oggetti empirici e definizioni astratte né quello dal livello semplicemente percettivo-visivo al livello teorico.[27] Queste transizioni possono essere raggiunte grazie al ruolo decisivo del

[27] Perkins, D.N. (1985). *The fingertip effect: How information-processing technology shapes thinking*. Educational Researcher, 14(7), 11-17.

docente che, oltre a guidare nei vari passaggi, assiste le conseguenti discussioni e condivisioni in classe.

D'altro canto l'introduzione nella didattica di artefatti come i DGS implica una ridefinizione dei ruoli assunti dall'insegnante, anche lui ha infatti bisogno di interiorizzare e personalizzare l'utilizzo efficiente di questi strumenti per poterne cogliere appieno le potenzialità.

Gli studenti, una volta interiorizzata la funzione di validazione offerta dal *dragging*, riescono facilmente ad autoconvincersi e convincere i compagni che la loro congettura è corretta, si corre però il rischio che considerino superflua la dimostrazione formale.

Alcuni ricercatori infatti sostengono che i DGS possano indebolire la necessità di ricercare una dimostrazione rigorosa per il fatto che l'evidenza visiva è talmente potente da rendere superflua ogni ulteriore prova. Secondo Hadas, Hershkowitz and Baruch (2000) la comparsa dei software di geometria dinamica ha sollevato il problema del ruolo della dimostrazione nel curriculum di matematica e geometria per il fatto che l'evidenza di una teoria o di un teorema può essere ottenuta in modo rapido e semplice attraverso la funzione di trascinamento. Il *dragging* consente agli studenti di controllare l'invarianza di una ipotesi, non in una sola figura, bensì in una intera categoria di oggetti. Questo processo convince gli studenti della validità della congettura. L'uso dei DGS, secondo questi autori, può ostacolare la comprensione della necessità di dimostrare quella ipotesi.[28]

A mio parere l'evidenza visiva offerta dai DGS ha una notevole utilità solo se inserita nel contesto corretto. La sfida consiste nel saper presentare il problema in modo aperto, come quando si propone: "*Costruisci questa figura, muovi il punto P e osserva cosa accade…*". Lo studente è molto più motivato se esplora e valida, con il *dragging*, le ipotesi che lui stesso scopre. L'evidenza visiva

---

[28] Hadas, Nurit, Hershkowitz, Rina and Schwarz, Baruch B., (2000) *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments.* Educational Studies in Mathematics, 44, 127–150.

potrebbe invece diventare disattivante se utilizzata semplicemente per ripercorrere la dimostrazione già nota di un teorema.[29]

L'insegnante dovrà quindi motivare gli alunni ad andare oltre la semplice convinzione data dalla percezione visiva: "è vero perché si vede in GeoGebra". Dovranno riposizionare la congettura fuori dell'ambiente del DGS per inserirla in un contesto teorico.

Gli studenti capiscono che, utilizzando lo strumento DGS, potranno meglio convincersi che l'assunto è vero, questa è una condizione necessaria, ma non sufficiente a dimostrarlo.[30]

Una volta verificata visivamente la veridicità dell'ipotesi affronteranno con più sicurezza la dimostrazione teorica perché sono convinti della sua esistenza. La dimostrazione di un teorema quindi procede in modo ascendente, dalla sperimentazione euristica alla dimostrazione teorica.[31]

Si può aggiungere che la dimostrazione raggiunge lo status di atto sociale in quanto si realizza all'interno di un micromondo costruito dagli studenti stessi, con l'aiuto del docente, che contiene codici e regole condivise.[32]

Un ultima considerazione sulle applicazioni di *modelling* 3D. A mio avviso si tratta di artefatti dalle grandi potenzialità in quanto permettono di amplificare gli "occhi della mente" nel rappresentare oggetti tridimensionali che altrimenti rimarrebbero confinati sul foglio di carta. Il loro utilizzo può fornire un utile supporto nella costruzione di significati, in particolare significati pertinenti rispetto agli obiettivi didattici e disciplinari che l'insegnante si pone.

---

[29] Mogetta, C., Olivero, F. and Jones, K. (1999) *Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment.* Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 19, (2), 91-96.
[30] Polya, G. (1954), *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press (in 2 volumes).
[31] Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O. (1999). *Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 22B, n.3, pp. 209-233.
[32] Barbin, E.: 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, Quaderno di lavoro n.10A, Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, anche in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 17B, 212-246; trad. it. con commento di 'La démostration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques', Bulletin APMEP, 366, 591-620.

Bibliografia

Aarnes J. F., Knudtzon A. H., (2003), *Conjecture and Discovery in Geometry, A dialogue between exploring with dynamic geometric software (DGS) and mathematical reasoning*, In Nordic pre-conference to ICME10 at Växjö University, May 9–11 2003

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivera, F., Robutti, O. and Paola, D. (1998), *A Model for Analysing the Transition to Formal Proofs in Geometry.* In A Olivier and K Newstead (Eds), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosch, South Africa. Vol. 2, 24-31.

Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O. (1999). *Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 22B, n.3, pp. 209-233.

Arzarello F., Olivero F, Robutti O. & Paola D. (1999), *I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, v. 22B, 309–338.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, d. & Robutti, O. (2002). *A cognitive analysis of dragging practices in Cabrì environments*, ZDM, vol.34, n.3, pp.66-72.

Barbin, E.: 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, Quaderno di lavoro n. 10A, Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, anche in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 17B, 212-246; trad. it. con commento di 'La démostration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques', Bulletin APMEP, 366, 591-620.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F.: 2005, *Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass*. Hoffmann, M.H.G., Lenhard, J. & Seeger, F. (Eds.), Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte. Springer, New York, 77-90.

Calvani, A. (2001). *Educazione, comunicazione e nuovi media, Sfide pedagogiche e cyberspazio*. Torino: Utet

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2004). *Proofs through the exploration in dynamic geometry environments*. Proceeding of the 28 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen-Norway, Vol.2, pp 215-222.

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N. and Jones, K. (2005) *Developing 3D dynamic geometry software: theoretical perspectives on design*. In, Olivero, F. and Sutherland, R. (eds.) Visions of Mathematics Education: Embedding Technology in Learning. Bristol, UK, University of Bristol, 69-77.

Confrey, J. (1995a), *A Theory of Intellectual Development: part II.* For the Learning of Mathematics. 15 (1) 38-48.

Dreyfus, T. (1991). *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education.* In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15 conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol 1, pp. 33-48). Genova: University of Genova.

Duval, R. (1999): *Representation, Vision and Visualisation: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. In F. Hitt, M. Santos (Eds), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME. México: 3-26.

Edwards, Julie-Ann and Jones, Keith (2006) *Linking geometry and algebra with GeoGebra.* Mathematics Teaching, 194, 28-30.

Furinghetti, F., Domingo P. (2002) *Defining within a dynamic geometry environment: notes from the classroom* (Vol. 2, pp. 392-399)

Furinghetti, F. & Paola, D.: (2003), *To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study*, Proceedings of PME 27 (Honolulu), v.2, 397-404.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. and Mariotti, M. A. (1996), *Challenging the Traditional School Approach to Theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems*, Proceedings of the 20[th] Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia, Vol. 2, 113-120.

Gawlick, T. (2002), *On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom.* International Reviews on Mathematical Education, 34(3), 85 – 92.

Hadas, Nurit, Hershkowitz, Rina and Schwarz, Baruch B., (2000) *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments.* Educational Studies in Mathematics, 44, 127–150.

Hanna, G. (2000). *Proof, explanation and exploration: an overview*. Educational Studies in Mathematics, 44(1), 5-23.

Hölzl, R. (1996): *How does 'dragging' affect the learning of geometry?* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2), 169- 187.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene. Master's thesis*, Universität Salzburg

Hohenwarter, M. (2003). *GeoGebra – dynamische Geometrie und Algebra*. MU 4, S. 33-40.

Jones, K. (1996), *Coming to know about 'dependency' within a dynamic geometry environment.* In: L. Puig and A. Gutiérrez (Eds), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Valencia, Volume 3, pp145-152.

Jones, K. (2000), *Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software.* Educational Studies in Mathematics, 44(1&2), 55-85.

Jones, K. (2001) *Learning geometrical concepts using dynamic geometry software.* In, Irwin, K. (ed.) Mathematics Education Research: A catalyst for change. Auckland, New Zealand, University of Auckland, 50-58.

Jones, Keith (2002) *Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom.* MicroMath, 18, (3), 18-20.

Jones, Keith (2005) *The shaping of student knowledge with dynamic geometry software.* In, Virtual Learning, the Computer Assisted Learning Conference 2005 (CAL05), Bristol, UK, 4-6 April 2005.

Laborde C. (2003) *Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics : the case of Cabri-geometry*, Proceedings of the 8th Asian Technology Conference in Mathematics, Wei-Chi Yang, Sung Chi Chu, Tilak de Alwis, Ming Gong Lee (eds), (Vol.1, pp. 23-38) Chung Hua University, Hsinchu Taiwan ROC

Mariotti, M. A. (2000), *Introduction to proof: the mediation of a dynamic Software environment*, Educational Studies in Mathematics, Volume 44, Issue - 1, pp 25-53

Mariotti, M. A., (2002), *Influence of technologies advances in students' math learning*, Handbook of International Research in Mathematics Educatio, chapter 29, pp. 757-786. Edited by L. D. English. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey

Mariotti Maria Alessandra (2003) *Geometry: dynamic intuition and theory*, 2o Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση "ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ" 11 - 13 Απριλίου 2003

Marrades, R. and Guitiérrez, Á. (2000). *Proofs produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment*. Educational Studies in Mathematics 44(1-2): 87-125.

Mason, J., & Heal, B. (1995). *Mathematical Screen Metaphors*. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education (pp. 291-308). Berlin: Springer- Verlag.

Mogetta, C., Olivero, F. and Jones, K. (1999) *Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment.* Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 19, (2), 91-96.

Norman D. (1993), *Things that make us smart, Perseus Books, Cambridge*, MA

Oldknow, A., (1997). *Dynamic geometry software - a powerful tool for teaching mathematics, not just geometry,* The Third International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Universität in Koblenz, Deutschland, Sept. 29-Oct. 2, 1997

Olive, J. *Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning*. Athens, Georgia, USA, May 2000.

Olivero, F. (1999). *Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations*. In: W. Maull & J. Sharp (eds), Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, University of Plymouth, UK

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). *Measures in Cabri as a bridge between perception and theory*. In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), Proceedings of PME25, Utrecht, The Netherlands, vol. 4, pp.9-16.

Olivero, F. & Robutti, O. (2002). *An exploratory study of students' measurement activity in a dynamic geometry environment*, Proceedings of CERME 2, Marianske Lazne, CZ, vol. I, pp. 215-226

Paola, D. (2001), '*L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche'*, in E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti (editors), Conferenze e Seminari Mathesis 2000-2001, 131–140.

Paola, D. (2004), *Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di matematica*, Progetto Alice, v. 5, n. 13, 103 - 121.

Pea, R. D. (1987), *Cognitive Technologies for Mathematics Education*. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 89-122). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Perkins, D.N. (1985). *The fingertip effect: How information-processing technology shapes thinking*. Educational Researcher, 14(7), 11-17.

Piochi, B., (2005), *Insegnare la matematica a studenti disabili*, Erickson, pp. 19-24

Polya, G. (1954), *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press (in 2 volumes).

Presmeg, N. (1986). *Visualization in high school mathematics*. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46.

Ranieri, M. (2004), *E-learning modelli e strategie didattiche,* Erickson, pp 71-74

Sanchez, E. and Sacristan, A. I. (2003), *Influential aspects of dynamic geometry activities in the construction of proofs*, in N.A.Pateman, B.J.Dougherty and J.T.Zilliox (Eds) Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, USA, Vol.4, 111-118.

Sträßer, R. (2001), *Cabri-Geometre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and Its Teaching and Learning?* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 319-333.

Teppo, A., (1991), *Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited.* , Mathematics Teacher , March, pg 210-221.

Verillion, P., & Rabardel, P. (1995). *Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity*. European Journal of Psychology of Education, 10, 77-101.

Vygotsky, L.S., (1978) *Mind in society: The development of higher mental processes,*- Cambridge, MA: Harvard University.

Wertsch JV, (1991) *Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action*, Harvard University Press

Yeh, A., & Nason, R. (2004). *Towards a semiotic framework for using technology in mathematics education: the case of learning 3D geometry*. Paper presented at the International Conference on Computers in Education.

Zuccheri L., (2004), *Calculating with rule and compasses*, in: ICME 10 Posters Abstracts, p.178

Sitografia

sketchup.google.com	SketchUp è uno strumento semplice ma potente per creare, visualizzare e modificare in modo rapido e facile le tue idee in 3D.
www.anastasis.it	Anastasis ha realizzato una collana di oltre 40 programmi software rivolti a bambini che mostrano difficoltà di apprendimento nell'acquisizione delle competenze scolastiche.
www.cabri.com	Cabri II Plus è un software commerciale di costruzioni geometriche dinamiche.
www.cabri.net	Projet Cabri Géomètre, Dynamic Geometry Software
www.geogebra.at	Geogebra è un software *opensource* gratuito di "matematica dinamica" per l'insegnamento nella scuola secondaria, che comprende geometria, algebra e analisi.
www.sinapsi.org/GeoGebra.htm	Raccolta animazioni realizzate dall'autore utilizzando GeoGebra, SketchUp e Cabrì