

### Prova d'esame n. 4

1 (a) Una scatola cubica ha lo spigolo di 80 cm.

- Quante sfere di raggio 5 cm può contenere?

- Quante sfere di raggio 10 cm può contenere?

- Quante sfere di raggio 20 cm può contenere?

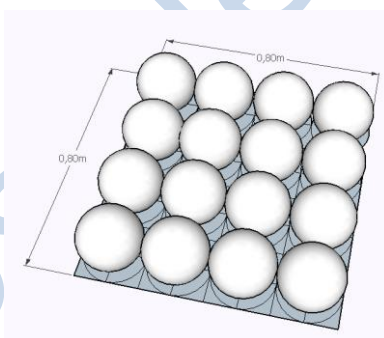
- Quante sfere di raggio 40 cm può contenere?

(b) Completa la tabella:

| raggio di una sfera<br>(in cm) | numero di sfere<br>contenute nella scatola | volume di una<br>sfera (in cm <sup>3</sup> ) | volume di tutte<br>le sfere (in cm <sup>3</sup> ) |
|--------------------------------|--|--|---|
| 5                              |  |  |   |
| 10                             |  |  |   |
| 20                             |  |  |   |
| 40                             |  |  |   |

Che cosa osservi? Fai attenzione: ti conviene esprimere i volumi in funzione di  $\pi$  senza usare il suo valore approssimato (puoi usare la calcolatrice).

**Procedimento:** (a) Per rispondere al quesito, consideriamo questa figura dove le sfere hanno il raggio di 10 cm.  $\text{Numero sfere per ogni lato} = \frac{80}{\text{diametro}} = \frac{80}{2 \times \text{raggio}} = \frac{80}{20} = 4$



e immaginiamo di avere 4 strati di sfere. In tutto avremo  $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$  sfere con il raggio di 10 cm. Useremo questa formula  $\text{sfere totali} = \left(\frac{80}{2 \times \text{raggio}}\right)^3$

(b)

| Raggio cm | Numero sfere                                | Volume una sfera                                    | Volume tutte sfere                    |
|-----------|---|---|---------------------------------------|
| 5         | $\left(\frac{80}{2 \cdot 5}\right)^3 = 512$ | $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 166,6 \cdot \pi$ | $166,6 \cdot 512 = 85333,3 \cdot \pi$ |
| 10        | $\left(\frac{80}{2 \cdot 10}\right)^3 = 64$ | $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = 1333,3\pi$      | $1333,3 \cdot 64 = 85333,3 \cdot \pi$ |
| 20        | $\left(\frac{80}{2 \cdot 20}\right)^3 = 8$  | $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = 10666,6\pi$     | $10666,6 \cdot 8 = 85333,3 \cdot \pi$ |
| 40        | $\left(\frac{80}{2 \cdot 40}\right)^3 = 1$  | $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 40^3 = 85333,3\pi$     | $85333,3 \cdot 1 = 85333,3 \cdot \pi$ |

2 In un riferimento cartesiano ortogonale, segna i seguenti punti:

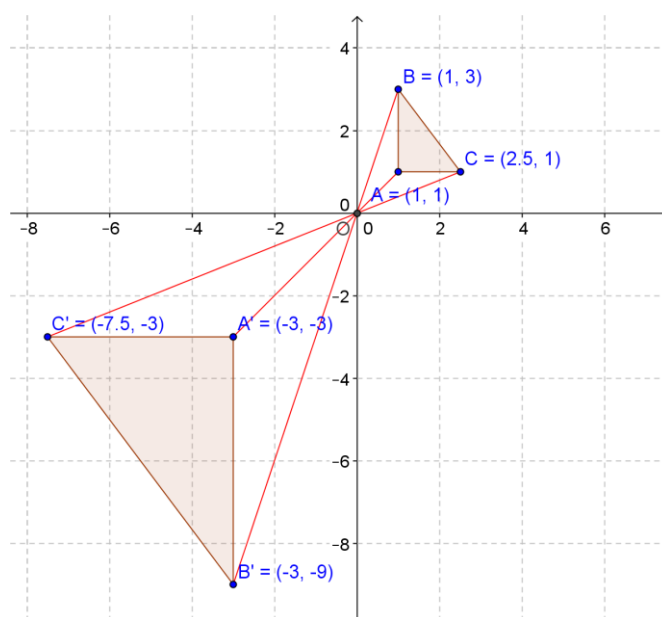
$A(1; 1)$   $B(1; 3)$   $C(2,5; 1)$

- Disegna il triangolo  $ABC$ . Trova l'immagine  $A'B'C'$ , di  $ABC$  nell'omotetia inversa di centro  $O$  (origine degli assi) e rapporto  $-3$ .
- Scrivi le coordinate di  $A'B'C'$ .  
Che cosa puoi dire dei triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$ ?
- Considera l'insieme dei prismi che hanno per base il triangolo  $ABC$  e altezza variabile.

Compila una tabella «altezza-volume» attribuendo all'altezza valori a piacere.

Indica con  $x$  l'altezza e con  $y$  il volume e scrivi la formula che esprime  $y$  in funzione di  $x$ . Disegna il grafico in un riferimento cartesiano.

**Procedimento:** (a)



(b) Le coordinate dei punti  $A'$   $B'$   $C'$  le troviamo moltiplicando quelle dei punti  $A$   $B$   $C$  per  $k=-3$ .  $A'(-3; -3)$   $B'(-3; -9)$   $C'(-7,5; -3)$ . I due triangoli sono simili.

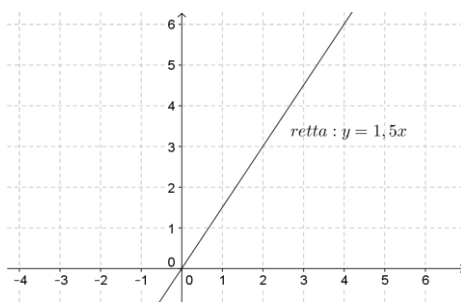
(c) Volume prisma =  $\text{area triangolo di base} \cdot \text{altezza}$

$$\text{Area triangolo di base} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{1,5 \cdot 2}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$$

| Altezza prisma: $x$ | Volume prisma: $y = 1,5 \cdot x$ |
|---------------------|----------------------------------|
| 1                   | $1,5 \cdot 1 = 1,5 \text{ cm}^3$ |
| 5                   | $1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ cm}^3$ |
| 10                  | $1,5 \cdot 10 = 15 \text{ cm}^3$ |
| 20                  | $1,5 \cdot 20 = 30 \text{ cm}^3$ |

La formula che esprime  $y$  in funzione di  $x$  è:  $y = 1,5 \cdot x$

Questo è il grafico in un riferimento cartesiano:



3 Risolvi le equazioni ed esegui la verifica.

(a)  $6x + 24 = 5x + 30$

(b)  $2x - \frac{2}{3}\left(3x - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

**Procedimento:** (a)  $6x + 24 = 5x + 30$  porto i termini con l'incognita a sinistra e quelli noti a destra:  $6x - 5x = +30 - 24$  sommo algebricamente:  $x = +6$

Verifico sostituendo all'incognita il valore +6:  $6 \cdot (+6) + 24 = 5 \cdot (+6) + 30$

$$+36 + 24 = +30 + 30 \quad +60 = +60 \text{ Verificato.}$$

(b)  $2x - \frac{2}{3}\left(3x - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$  svolgo i calcoli per eliminare le parentesi tonde:

$$2x - 2x + \frac{2}{15} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15}x - \frac{1}{5} \quad \text{Sommo i termini simili: } +\frac{2}{15} = -\frac{1}{15}x$$

$$\text{moltiplico entrambi per -15: } (-15) \cdot \left(+\frac{2}{15}\right) = (-15) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot x$$

$$x = -2$$

Verifico sostituendo all'incognita il valore trovato: -2

$$2 \cdot (-2) - \frac{2}{3} \cdot \left(3 \cdot (-2) - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-2) + 1\right)$$

$$-4 - \frac{2}{3} \cdot \left(-6 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3} + 1\right)$$

$$-4 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-30 - 1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-2 + 3}{3}\right)$$

$$-4 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{31}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)$$

$$-4 + \frac{62}{15} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$

$$\frac{-60 + 62}{15} = \frac{3 - 1}{15} \quad +\frac{2}{15} = +\frac{2}{15} \text{ Verificato}$$

4 Una nave emette degli ultrasuoni per conoscere la profondità del mare in un determinato punto. Gli ultrasuoni si riflettono sul fondo e tornano alla nave dopo 4 secondi. Qual è la profondità del mare in quel punto, sapendo che la velocità del suono nell'acqua è di circa 1460 m/s?

**Procedimento:** dalla formula:  $Velocità = \frac{spazio}{tempo}$  ricavo che  $spazio = velocità \cdot tempo$

In 4 secondi gli ultrasuoni percorrono il tragitto tra la nave, il fondo e ritorno.

$$spazio = 1460 \cdot 4 = 5840 \text{ metri}$$

Quindi la profondità del mare è la metà del percorso di andata e ritorno:

$$\frac{5840}{2} = 2920 \text{ metri}$$