Prova d'esame n. 6

1 Un triangolo rettangolo è equivalente a un rettangolo avente la base di 48 cm.

L'ipotenusa è $\frac{5}{4}$ del cateto maggiore e la somma delle loro lunghezze è 72 cm.

(a) Determina il perimetro dei due poligoni.

(b) Fai ruotare il triangolo intorno al cateto maggiore e il rettangolo attorno al lato minore e determina il rapporto tra le superfici laterali e il rapporto fra i volumi dei solidi.

(c) Sovrapponi i due solidi e determina la superficie totale e il volume del solido composto.

(d) Supponendo che entrambi i solidi siano di ferro (densità = 7,5 g/cm^3), determina la massa di ciascun solido.

(e) Supponendo invece che il solido composto abbia massa pari a 192 921,6 g, determina la densità del materiale di cui è composto.

Procedimento: Quando conosciamo il rapporto e la somma di due grandezze possiamo applicare la proprietà del comporre alla proporzione: $5 : 4 = ipotenusa : cateto\ maggiore$

$$(5+4) : 5 = (ipotenusa + cateto\ maggiore) : ipotenusa$$

$$9 : 5 = 72 : ipotenusa$$

$$ipotenusa = \frac{5 \times 72}{9} = 40\ cm$$

$$cateto\ maggiore = 72 - 40 = 32\ cm$$

Con Pitagora troviamo il cateto minore:

$$cateto\ minore = \sqrt[2]{ipotenusa^2 - cateto\ maggiore^2} = \sqrt[2]{40^2 - 32^2} = \sqrt[2]{576} = 24\ cm$$

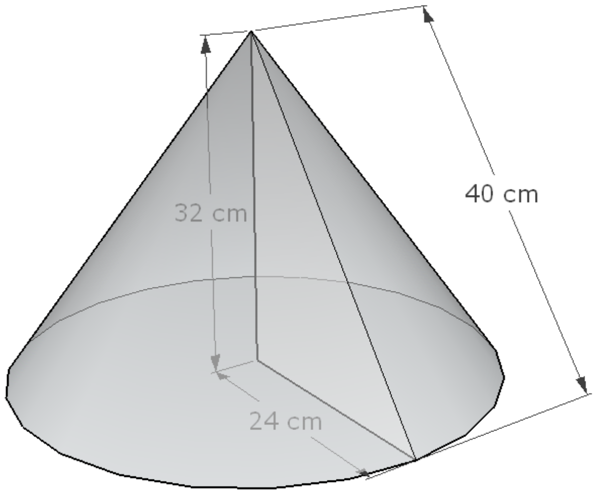
$$area\ triangolo\ rettangolo = \frac{cateto\ minore \times cateto\ maggiore}{2} = \frac{24 \times 32}{2} = 384\ cm^2$$

Se il rettangolo equivalente (con la stessa area del triangolo) ha la base di 48 cm, possiamo trovarne l'altezza:

$$altezza\ rettangolo = \frac{area}{base} = \frac{384}{48} = 8\ cm$$

$$(a)\ perimetro\ triangolo = cateto\ minore + cateto\ maggiore + ipotenusa = 24 + 32 + 40 = 96\ cm$$
$$perimetro\ rettangolo = (base + altezza) \times 2 = (48 + 8) \times 2 = 112\ cm$$

Se facciamo ruotare il triangolo intorno al cateto maggiore otteniamo questo solido:

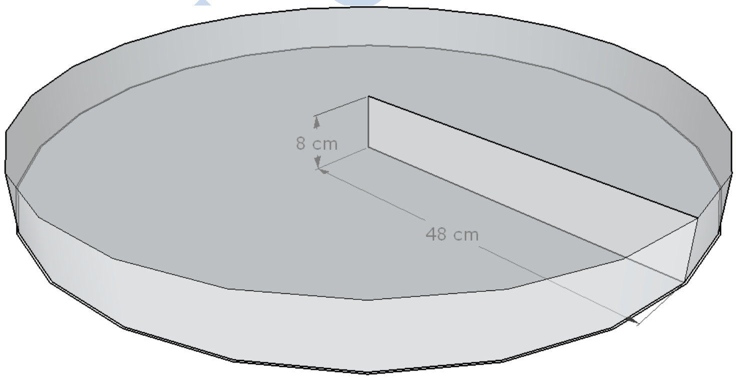


Si tratta di un cono, dove il raggio di base è 24 cm, l'apotema è 40 cm e l'altezza 32 cm. Troviamo area laterale e volume di questo cono.

$$Area\ laterale\ cono = \frac{circonferenza \times apotema}{2} = \frac{(2\pi \times 24 \times 40)}{2} = 960\pi\ cm^2$$

$$Volume\ cono = \frac{area\ base \times altezza}{3} = \frac{\pi \times 24^2 \times 32}{3} = 6144\pi\ cm^3$$

Se facciamo ruotare il rettangolo attorno al lato minore otteniamo questo solido:



Un cilindro di raggio 48 cm e altro 8 cm. Troviamo area laterale e volume.

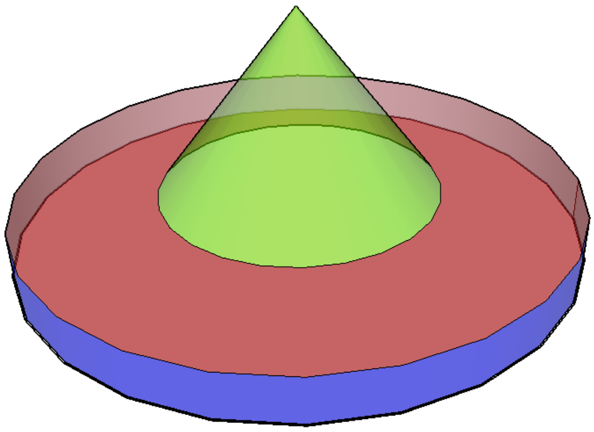
$$Area\ laterale\ cilindro = circonferenza \times altezza = 2\pi \times 48 \times 8 = 768\pi\ cm^2$$

$$Volume\ cilindro = area\ base \times altezza = \pi \times 48^2 \times 8 = 18432\pi\ cm^3$$

$$(b)\ rapporto\ tra\ superfici\ laterali: \frac{960\pi}{768\pi} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$rapporto\ tra\ volumi: \frac{6144\pi}{18432\pi} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Appoggiamo il cono sopra al cilindro.



Il volume totale è la somma dei due volumi.

$$(c)\ Volume\ totale = volume\ cilindro + volume\ cono = 18432\pi + 6144\pi = 24576\pi\ cm^3$$
$$= 77168{,}64\ cm^3$$

Mentre la superficie totale è formata da:

$$2 \times area\ base\ cilindro - area\ base\ cono + area\ laterale\ cilindro + area\ laterale\ cono$$

Perché bisogna sottrarre la base del cono che, appoggiandosi su quella del cilindro, non fa parte della superficie totale.

$$2 \times \pi \times 48^2 - \pi 24^2 + 768\pi + 960\pi = 4608\pi - 576\pi + 768\pi + 960\pi = 5760\pi\ cm^2$$

$$(d)\ massa\ cono = volume\ cono \times densità = 6144 \times 3{,}14 \times 7{,}5 = 19292{,}16 \times 7{,}5 =$$

$$144691{,}2\ grammi = 144{,}6912\ Kg$$

$$massa\ cilindro = volume\ cilindro \times densità = 18432 \times 3{,}14 \times 7{,}5 = 57876{,}48 \times 7{,}5 =$$

$$434073{,}6\ grammi = 434{,}0736\ Kg$$

$$(e)\ densità = \frac{massa}{volume\ totale\ solidi} = \frac{192921{,}6}{77168{,}64} = 2{,}5\ \frac{grammi}{cm^3}$$

2

(a) In un riferimento cartesiano rappresenta i punti:

$A(-3; -2)$ $B(-3; +3)$ $C(+5; +3)$ $D(+2; -2)$

(b) Uniscili nell'ordine e descrivi il poligono ottenuto.

(c) Calcola area e lunghezza del perimetro del poligono (l'unità di misura è il cm).

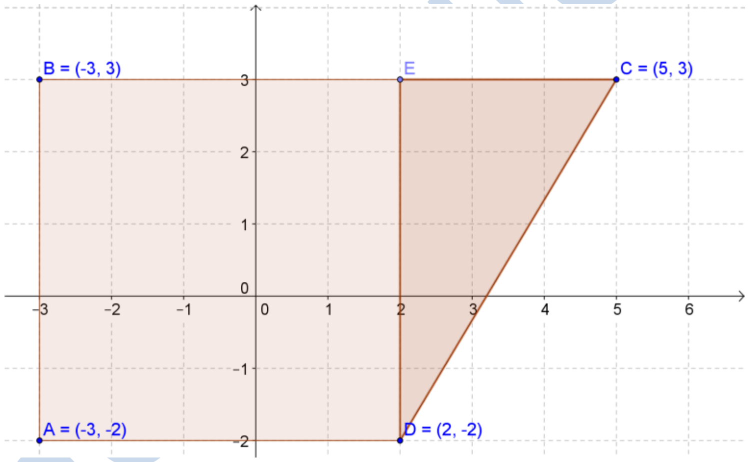
(d) Verifica che la retta r di equazione

$$y = \frac{5}{3}x$$

è parallela alla retta CD.

(e) Scrivi l'equazione della retta passante per O e perpendicolare alla retta r.

Procedimento: (a)



(b) Unendo i punti otteniamo un trapezio rettangolo.

$$(c)\ Area = \frac{(base\ maggiore + base\ minore) \times altezza}{2} = \frac{(BC + AD) \times AB}{2} = \frac{(8+5) \times 5}{2} = 32{,}5\ cm^2$$

Con Pitagora applicato al triangolo DCE, trovo la lunghezza del lato obliquo CD.

$$CD = \sqrt[2]{DE^2 + CE^2} = \sqrt[2]{5^2 + 3^2} = \sqrt[2]{34} = 5{,}83\ cm$$

$$Perimetro = AB + BC + CD + DA = 5 + 8 + 5{,}83 + 5 = 23{,}83\ cm$$

(d) Per trovare la retta passante per i punti C (+5; +3) e D (+2; -2) usiamo questa formula:

$$\frac{y-y_D}{x-x_D}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D} \quad \textit{alla quale sostituiamo i valori dei punti } C \textit{ e } D$$

$$\frac{y+2}{x-2}=\frac{3+2}{5-2}$$

$$\frac{y+2}{x-2}=\frac{5}{3}$$

$$y+2=\frac{5}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}-2$$

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{16}{3}$$

$$Che\ ha\ lo\ stesso\ coefficiente\ angolare\ \left(\frac{5}{3}\right)\ della\ retta\ y=\frac{5}{3}x$$

(e) La retta perpendicolare deve avere il coefficiente angolare opposto ed inverso:

$$m=-\frac{3}{5}$$

Inoltre se deve passare per l'origine il suo termine noto deve essere uguale a zero.

Quindi la retta cercata è:

$$y=-\frac{3}{5}x$$

3 Risolvi le seguenti equazioni e verifica se ve ne sono di equivalenti; in caso affermativo, scrivi quali sono.

(a) $12+(2x-8)+7(x+1)=5x+3$

(b) $\frac{2x+5}{2}+\frac{3(2x+5)}{4}=3+\frac{2x-3}{4}$

(c) $(x+1)(x-1)+3(2x+2)=(x+1)^2+2(3x-2)$

Procedimento:

$(a)\ 12+2x-8+7x+7=5x+3$

$2x+7x-5x=+3-12+8-7$

$4x=-8$

$x=-\frac{8}{4}=-2$

$(b)\ 4\frac{2x+5}{2}+4\frac{6x+15}{4}=12+4\frac{2x-3}{4}$

$4x+10+6x+15=12+2x-3$

$4x+6x-2x=12-3-10-15$

$8x=-16$

$x=-\frac{16}{8}=-2$

$(c)\ x^2-1+6x+6=x^2+2x+1+6x-4$

$x^2-x^2+6x-2x-6x=+1-4+1-6$

$-2x=-8$

$x=\frac{-8}{-2}=+4$

Sono equivalenti, con la stessa soluzione, la (a) e la (b).

4 Nelle batterie eliminatorie della gara dei 100 metri piani svoltasi tra gli alunni di una scuola media, i tempi registrati sono stati i seguenti:

tempo in secondi	10,9	11,1	11,2	11,4	11,6	11,7	12
numero alunni	1	3	8	12	6	4	1

(a) Verifica se i valori della moda, della media e della mediana coincidono.

(b) Rappresenta i dati mediante il grafico che ritieni più adatto.

Procedimento:

(a) la moda è il valore che compare più volte, in questa tabella la moda è 11,4 perché è il valore registrato da 12 alunni.

La media si trova sommando i tempi di ciascun alunno e dividendo poi per il numero di alunni.

Somma dei tempi di ciascun alunno:

$10{,}9 + 11{,}1 \times 3 + 11{,}2 \times 8 + 11{,}4 \times 12 + 11{,}6 \times 6 + 11{,}7 \times 4 + 12 = 399\ secondi$

Numero di alunni:

$1 + 3 + 8 + 12 + 6 + 4 + 1 = 35\ alunni$

$$Media = \frac{399}{35} = 11{,}4\ secondi$$

La mediana è quel valore che sta in mezzo alla sequenza ordinata di valori. In questo caso ci sono 35 valori per cui la mediana è il tempo del diciottesimo alunno.

$Mediana = 11{,}4\ secondi$

Quindi in questo caso moda=media=mediana.

(b)