Prova d'esame n. 9

1 Un trapezio isoscele ha il perimetro di 60 cm, i lati obliqui misurano ciascuno 10 cm e la base maggiore è $\frac{13}{7}$ della base minore. Calcola:

(a) l'area del trapezio;

(b) il volume e la superficie totale del solido ottenuto dalla rotazione di 360° del trapezio intorno alla base maggiore;

(c) la massa del solido, supponendo che sia di legno (densità 0,7 g/cm^3).

Procedimento:

$$Somma\ delle\ basi = perimetro - due\ lati\ obliqui = 60 - 10 - 10 = 40\ cm$$

Applichiamo la proprietà del comporre alla proporzione:

$$13 : 7 = base\ maggiore : base\ minore$$

$$(13 + 7) : 7 = (base\ maggiore + base\ minore) : base\ minore$$

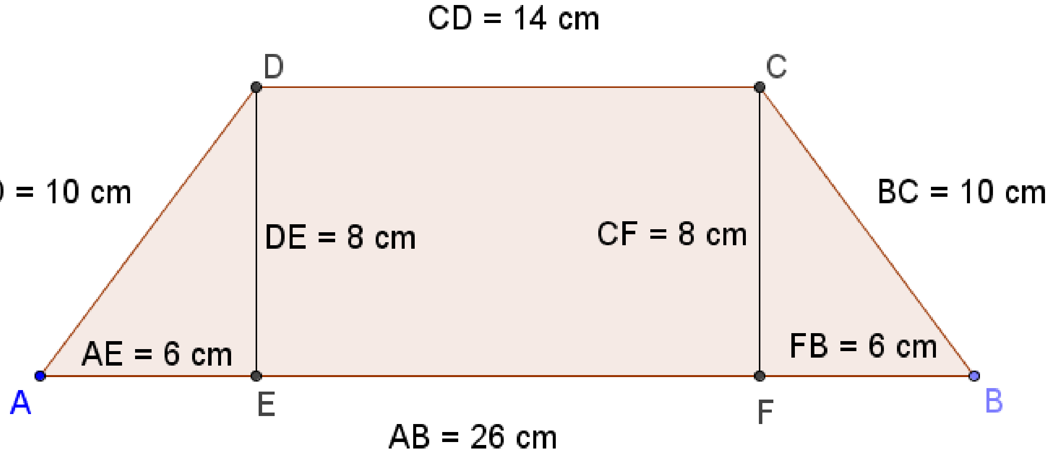
$$20 : 7 = 40 : base\ minore$$

$$base\ minore = \frac{7 \times 40}{20} = 14\ cm$$

$$base\ maggiore = 40 - 14 = 26\ cm$$

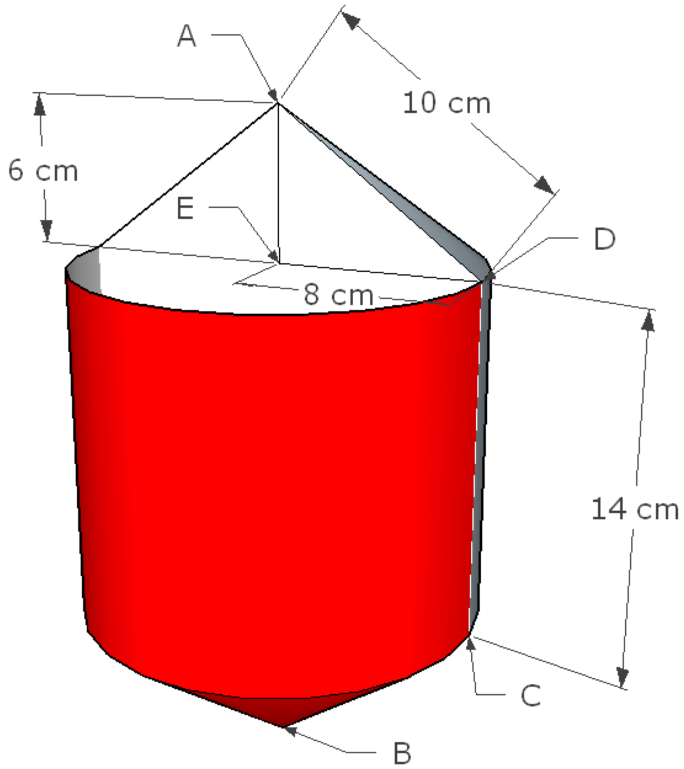
Applichiamo Pitagora al triangolo rettangolo ADE e calcoliamo l'altezza DE:

$$DE = \sqrt[2]{AD^2 - AE^2} = \sqrt[2]{10^2 - 6^2} = \sqrt[2]{100 - 36} = \sqrt[2]{64} = 8\ cm$$



$$(a)\ Area = \frac{(base\ maggiore + base\ minore) \times altezza}{2} = \frac{(26 + 14) \times 8}{2} = \frac{40 \times 8}{2} = 160\ cm^2$$

Calcoliamo il volume del solido ottenuto con la rotazione di 360° attorno alla base maggiore.



Dalla figura vediamo che si tratta di un cilindro con due coni sovrapposti.

Il raggio del cilindro e dei coni DE = 8 cm. L'altezza del cilindro DC = 14 cm.

L'apotema dei coni AD = 10 cm.

(b)

$$Volume\ cilindro = area\ cerchio\ di\ base\ \times altezza = \pi \cdot raggio^2 \cdot altezza = \pi \cdot 8^2 \cdot 14 = \pi \cdot 896\ cm^3$$

$$Volume\ di\ un\ cono = \frac{area\ cerchio\ base \times altezza}{3} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 6}{3} = \pi \cdot 128\ cm^3$$

$$Volume\ totale = volume\ cilindro + volume\ dei\ due\ coni = \pi \cdot 896 + \pi \cdot 128 \cdot 2 = \pi \cdot 1152\ cm^3 = 3617{,}28\ cm^3$$

$$Area\ laterale\ cilindro = circonferenza\ di\ base \times altezza = 2\pi \cdot raggio \cdot altezza = \pi \cdot 16 \cdot 14 = \pi \cdot 224\ cm^2$$

$$Area\ laterale\ cono = \frac{circonferenza\ di\ base \times apotema}{2} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 10}{2} = \pi \cdot 80\ cm^2$$

$$Area\ totale\ solido = area\ laterale\ cilindro + area\ laterale\ dei\ due\ coni = \pi \cdot 224 + \pi \cdot 80 \cdot 2 = \pi \cdot 384\ cm^2 = 1205{,}76\ cm^2$$

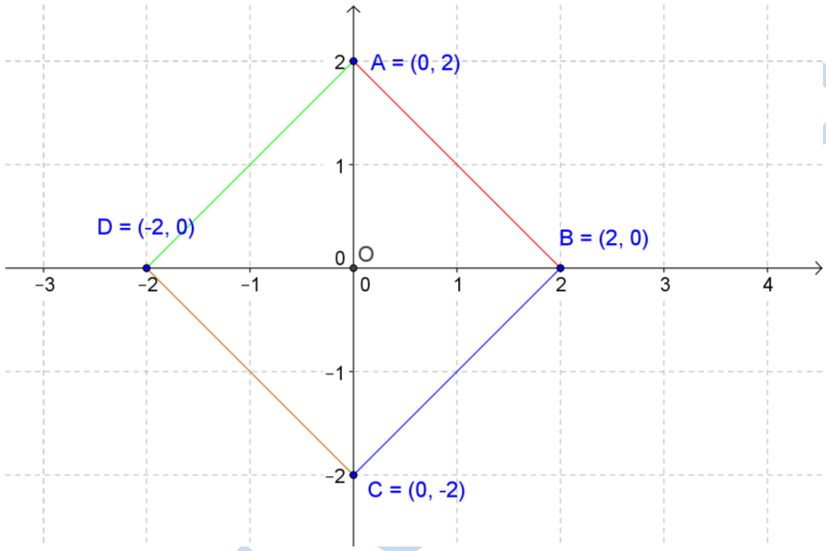
$$(c)\ \ massa\ = \ volume \times densita' = 3617{,}28 \times 0{,}7 \cong 2532{,}1\ grammi$$

2 In un riferimento cartesiano disegna il segmento AB, aventecome estremi i punti $A(0; 2)$, e $B(2; 0)$.
Costruisci il simmetrico di AB rispetto all'asse x.
Costruisci il simmetrico di AB rispetto all'asse y.
Costruisci il simmetrico di AB rispetto al centro O (origine degli assi).

(a) Quale figura geometrica si ottiene? Rispondi giustificando.

(b) La figura geometrica così ottenuta è faccia di un poliedro regolare. Spiega di quale poliedro si tratta e poi calcola l'area della superficie totale e il volume.

Procedimento:



(a) Si tratta del quadrato ABCD. La lunghezza del segmento AB si calcola applicando Pitagora al triangolo rettangolo AOB.

$AB = \sqrt[2]{2^2 + 2^2} = \sqrt[2]{8} = 2\sqrt[2]{2}\, u$

(b) Il poliedro regolare che ha come faccia un quadrato è un cubo.

$Area\ totale\ del\ cubo = lato^2 \times 6 = \left(\sqrt[2]{8}\right)^2 \times 6 = 8 \times 6 = 48\, u^2$

$Volume\ del\ cubo = lato^3 = \left(2 \cdot \sqrt[2]{2}\right)^3 = 16 \cdot \sqrt[2]{2}\, u^3$

3 Sia dato il seguente problema:

se tolgo 8 al quadrato di un numero ottengo 2. Qual è il numero?

(a) Per rispondere alla domanda scrivi un'equazione. Questa equazione ha soluzione nell'insieme dei numeri razionali? E nell'insieme dei numeri reali? Giustifica le risposte.

(b) Sostituisci nel problema al numero 2 un numero a tua scelta in modo che il quesito abbia soluzioni nell'insieme dei numeri razionali.
Imposta l'equazione e risolvi.

Procedimento:

$(a)\ \ chiamo\ il\ numero\ da\ trovare\ "x"$

$Imposto\ questa\ equazione\colon\ x^2 - 8 = 2$

Che posso risolvere in questo modo:

$x^2 - 8 + 8 = 2 + 8$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt[2]{10}$

Che non ha soluzione nei numeri razionali in quanto 10 non è un quadrato perfetto. La sua soluzione è un numero reale.

(b) Per ottenere come soluzione un numero razionale bisogna fare in modo che la somma di 8 e un numero scelto da noi sia un quadrato perfetto. Quindi vanno bene ad esempio i numeri 1; 8; -4; 17; 28 ecc.

Infatti : 8+1=9; 8+8=16; 8-4=4; 8+17=25; 8+28=36; …

4 Un tetraedro regolare di materiale omogeneo ha le facce numerate con i numeri naturali da 1 in poi. Lanciamo in aria il tetraedro e lasciamolo ricadere: prendiamo in considerazione la faccia a terra.

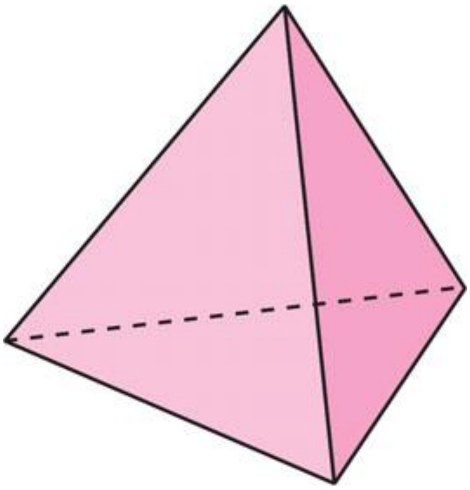
(a) Quanti sono i casi possibili (ugualmente probabili)?

(b) Qual è la probabilità che la faccia a terra sia il numero 3?

(c) Qual è la probabilità che sia il numero 5?

(d) Qual è la probabilità che sia un numero pari?

Procedimento: Questo è un tetraedro, ha 4 facce uguali.



(a) I casi possibili (equiprobabili) sono 4, come le facce.

(b) Se le facce sono numerate da 1 a 4, abbiamo una sola faccia con il numero 3, quindi la probabilità che la faccia a terra sia 3 è di: $\frac{1}{4}$

(c) Il numero 5 non compare mai sulle 4 facce, la probabilità è nulla: 0

(d) Le facce con numeri pari sono due: quella marcata con il 2 e quella marcata con il 4. Quindi la probabilità è: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$