Prova d'esame n. 8

1 Una prisma retto a base quadrata è circoscritto a un cilindro equilatero. L'area di base del cilindro è di 100 π cm^2. Calcola:

(a) la superficie totale e il volume del cilindro;

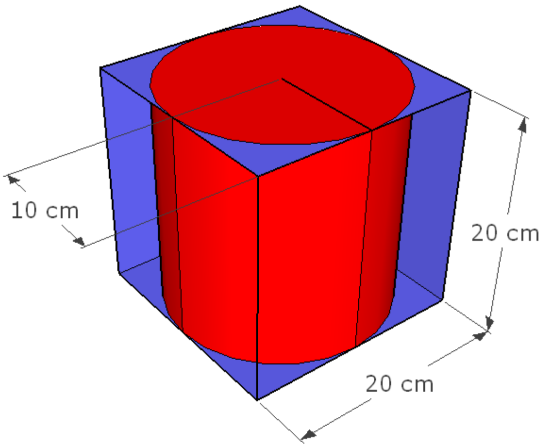
(b) la superficie totale e il volume del prisma;

(c) l'area della superficie del solido e del volume che si ottiene scavando dal prisma il cilindro.

Procedimento: Calcoliamo il raggio di base del cilindro.

$$raggio = \sqrt[2]{\frac{Area}{\pi}} = \sqrt[2]{\frac{100\pi}{\pi}} = \sqrt[2]{100} = 10\ cm$$

La base quadrata è circoscritta al cerchio, quindi il lato del quadrato misura come il diametro = 20 cm. Inoltre il cilindro equilatero ha l'altezza uguale al diametro, quindi anche il prisma è alto 20 cm e dunque si tratta di un cubo.



(a) $Area\ totale\ cilindro = Area\ laterale + area\ due\ cerchi\ di\ base =$

$2 \cdot \pi \cdot raggio \cdot altezza + 2 \cdot \pi \cdot raggio^2 = 400 \cdot \pi + 200 \cdot \pi = 600 \cdot \pi\ cm^2$

$Volume = area\ cerchio\ di\ base \times altezza = \pi \cdot raggio^2 \times altezza = \pi \cdot 100 \cdot 20 = 2000 \cdot \pi\ cm^3$

(b) $Area\ totale\ cubo = area\ di\ una\ faccia \times 6 = lato^2 \times 6 = 20^2 \times 6 = 400 \times 6 = 2400\ cm^2$

$Volume\ del\ cubo = lato^3 = 20^3 = 8000\ cm^3$

(c) Se togliamo dal cubo il cilindro avremo questo volume:

$Volume\ cubo - volume\ cilindro = 8000 - 2000 \cdot \pi = 1720\ cm^3$

La superficie del solido così ottenuto è formata da:

$Area\ laterale\ cilindro + area\ laterale\ cubo = 400 \cdot \pi + 4 \cdot 400 = 400 \cdot \pi + 1600 = 2856\ cm^2$

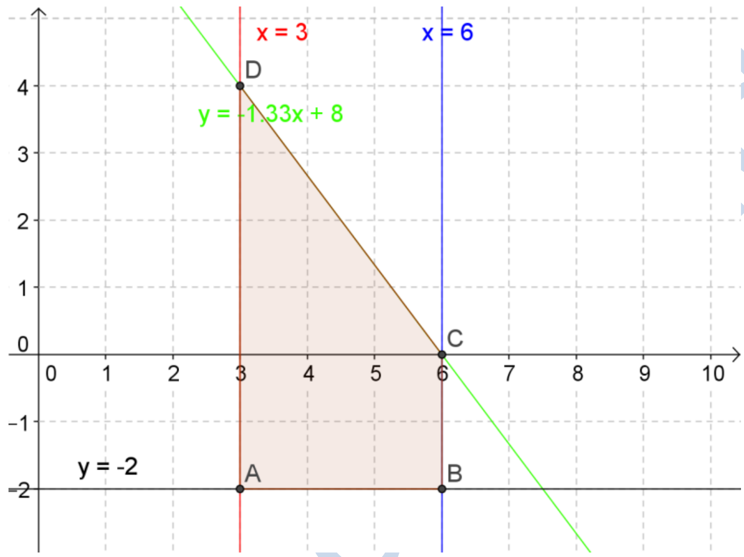
2 Disegna in un riferimento cartesiano le quattro rette di equazione:

(a) $x = 3 \qquad x = 6 \qquad y = -\frac{4}{3}x + 8 \qquad y = -2$

(a) Dimostra che le quattro rette incontrandosi formano un trapezio rettangolo.

(b) Calcola la lunghezza del perimetro e l'area del trapezio.

Procedimento: La prima retta è rossa, la seconda è blu, la terza è verde e l'ultima nera.



Il quadrilatero ABCD è un trapezio rettangolo.

$AB = 3\,u; \quad AD = 6\,u; \quad BC = 2\,u; \quad DC = \sqrt[2]{3^2 + 4^2} = \sqrt[2]{25} = 5\,u$

$Perimetro = 3 + 6 + 2 + 5 = 16\,u$

$$Area = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} = \frac{(6 + 2) \times 3}{2} = 12\,u^2$$

3 Risolvi e verifica la seguente equazione:

$$\frac{2(3 + x)}{5} + \frac{(x - 2)^2}{4} = \frac{(3 + x)^2}{4} - \frac{3x - 12}{3} - 2x$$

Procedimento:

$$\frac{6 + 2x}{5} + \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{9 + 6x + x^2}{4} - \frac{3x - 12}{3} - 2x$$

Il minimo comune multiplo di 5; 4 e 3 vale 60:

$$12 \cdot \frac{6 + 2x}{60} + 15 \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{60} = 15 \cdot \frac{9 + 6x + x^2}{60} - 20 \cdot \frac{3x - 12}{60} - 60 \cdot \frac{2x}{60}$$

$$\frac{72+24x}{60}+\frac{15x^2-60x+60}{60}=\frac{135+90x+15x^2}{60}-\frac{60x-240}{60}-\frac{120x}{60}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per 60:

$$72+24x+15x^2-60x+60=135+90x+15x^2-60x+240-120x$$

Portiamo i termini noti a destra e le incognite a sinistra:

$$24x+15x^2-60x-90x-15x^2+60x+120x=135+240-72-60$$

$$54x=243$$

$$x=\frac{243}{54}=\frac{9}{2}$$

La verifica consiste nel mettere il valore trovato al posto dell'incognita x:

$$\frac{2\left(3+\frac{9}{2}\right)}{5}+\frac{\left(\frac{9}{2}-2\right)^2}{4}=\frac{\left(3+\frac{9}{2}\right)^2}{4}-\frac{3\cdot\frac{9}{2}-12}{3}-2\cdot\frac{9}{2}$$

$$\frac{2\left(\frac{15}{2}\right)}{5}+\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{4}=\frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{4}-\frac{\frac{27}{2}-12}{3}-9$$

$$\frac{15}{5}+\frac{\frac{25}{4}}{4}=\frac{\frac{225}{4}}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{3}-9$$

$$3+\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{225}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}-9$$

$$3+\frac{25}{16}=\frac{225}{16}-\frac{1}{2}-9$$

$$\frac{48}{16}+\frac{25}{16}=\frac{225}{16}-\frac{8}{16}-\frac{144}{16}$$

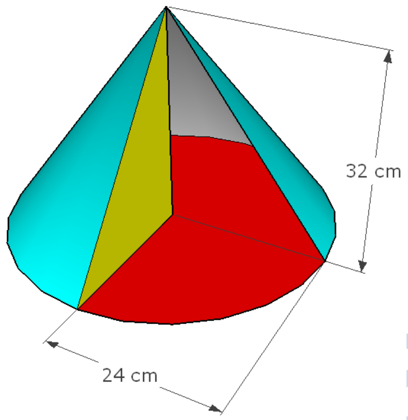
$$\frac{73}{16}=\frac{73}{16}$$

4 Un cono d'alluminio ha raggio di base uguale a 24 cm e altezza uguale a 32 cm.

(a) Calcola la massa del solido tenendo conto che la densità dell'alluminio è di 2,7 g/cm^3.

(b) Scrivi le formule che legano la massa, il volume e la densità. La massa e il volume sono grandezze direttamente o inversamente proporzionali?

Procedimento:



(a)

$$Volume\ del\ cono = \frac{area\ cerchio\ di\ base \times altezza}{3} = \frac{raggio^2 \cdot \pi \cdot 32}{3} = \frac{24^2 \cdot \pi \cdot 32}{3} = 19292{,}16\ cm^3$$

$$Massa\ del\ cono = Volume \times densita' = 19292{,}16 \times 2{,}7 = 52088{,}832 \cong 52089\ grammi$$

(b)

$$Massa = Volume \times densita'$$

$$Volume = \frac{Massa}{densita'}$$

$$Densita' = \frac{Massa}{Volume}$$

La massa e il volume sono grandezze **direttamente proporzionali** in quanto se aumenta l'una, aumenta anche l'altra.