Prova d'esame n. 1

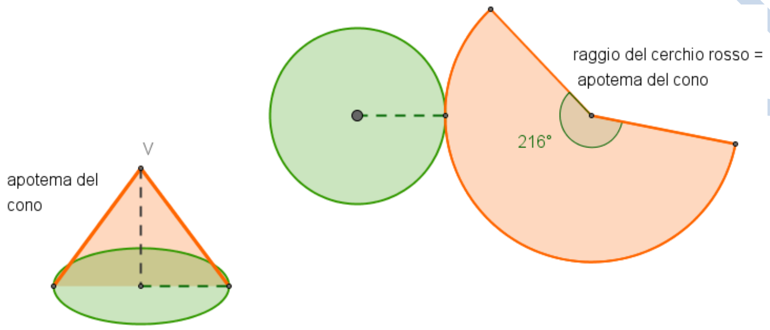
1 Lo sviluppo della superficie laterale di un cono è un settore circolare con angolo al centro di 216° e area di 540 π cm^2. Calcola:

(a) il raggio del cerchio al quale appartiene il settore circolare;

(b) la superficie totale e il volume del cono;

(c) la superficie totale di un cilindro equivalente al cono il cui raggio di base sia di 24 cm.

Procedimento: Questa è la figura, l'area laterale, cioè il settore circolare, è colorata di rosso:



Impostiamo questa proporzione e troviamo l'area del cerchio rosso completo:

$$area\ settore : 216° = area\ cerchio\ completo : 360°$$

$$area\ cerchio\ rosso\ completo = \frac{area\ settore \times 360°}{216°} = \frac{540\,\pi \times 360°}{216°} = 900\,\pi\ cm^2$$

Conoscendo l'area di un cerchio possiamo trovarne il raggio che, in questo caso, è l'apotema del cono.

(a) $raggio\ cerchio\ rosso = apotema\ cono = \sqrt[2]{\frac{area\ cerchio}{\pi}} = \sqrt[2]{\frac{900\,\pi}{\pi}} = \sqrt[2]{900} = 30\ cm$

Osserviamo che la lunghezza del contorno del settore circolare è uguale alla circonferenza del cerchio verde, base del cono.

Lunghezza circonferenza cerchio rosso completo=$2 \times \pi \times 30 = 60\,\pi\ cm$

$$60\,\pi : 360° = lunghezza\ contorno\ settore\ circolare : 216°$$

Lunghezza contorno settore circolare=circonferenza cerchio verde=$\frac{60\,\pi \times 216°}{360°} = 36\,\pi\ cm$

Raggio cerchio verde, base del cono=$\frac{circonferenza}{2\,\pi} = \frac{36\,\pi}{2\,\pi} = 18\ cm$

Area cerchio verde, base del cono=$\pi\ raggio^2 = \pi \times 18^2 = 324\,\pi\ cm^2$

(b) Area totale cono = area cerchio base + area laterale = $324\,\pi + 540\,\pi = 864\,\pi\ cm^2$

Con Pitagora troviamo l'altezza cono = $\sqrt[2]{apotema^2 - raggio\ base^2} = \sqrt[2]{30^2 - 18^2} = 24\ cm$

(b) Volume cono = $\frac{area\ cerchio\ di\ base \times altezza}{3} = \frac{324\,\pi \times 24}{3} = 2592\,\pi\ cm^3$

Il cilindro è equivalente al cono, cioè ha lo stesso volume.

Area cerchio di base del cilindro = $\pi\ raggio^2 = \pi\ 24^2 = \pi\ 576\ cm^2$

Altezza cilindro = $\frac{volume\ cilindro}{area\ cerchio\ di\ base} = \frac{2592\,\pi}{576\,\pi} = 4{,}5\ cm$

Circonferenza di base del cilindro = $2\,\pi \times 24 = 48\,\pi\ cm$

Area laterale del cilindro = $circonferenza\ di\ base\ \times altezza = 48\,\pi \times 4{,}5 = 216\,\pi\ cm^2$

(c) Area totale cilindro = area dei due cerchi di base + area laterale =

$= 2 \times 576\,\pi + 216\,\pi = 1152\,\pi + 216\,\pi = 1368\,\pi\ cm^2$

2 Risolvi la seguente equazione e verifica che la sua radice è uguale alla misura del raggio di base del cilindro.

$$\frac{(x-5)(x-2)}{5} + \frac{(x+7)(x-7)}{15} - \frac{7}{30} = \frac{(x-3)^2}{10} + \frac{x^2}{6} - \frac{9}{10}x$$

Procedimento:

$$\frac{(x^2-2x-5x+10)}{5} + \frac{(x^2-7x+7x-49)}{15} - \frac{7}{30} = \frac{(x-3)(x-3)}{10} + \frac{x^2}{6} - \frac{9}{10}x$$

$$\frac{(x^2-7x+10)}{5} + \frac{(x^2-49)}{15} - \frac{7}{30} = \frac{(x^2-3x-3x+9)}{10} + \frac{x^2}{6} - \frac{9}{10}x$$

Il m.c.m. di (5; 15; 30; 10; 6) = 30

$$\frac{6(x^2-7x+10)}{30} + \frac{2(x^2-49)}{30} - \frac{7}{30} = \frac{3(x^2-6x+9)}{30} + \frac{5x^2}{30} - \frac{27}{30}x$$

$$\frac{6x^2-42x+60}{30} + \frac{2x^2-98}{30} - \frac{7}{30} = \frac{3x^2-18x+27}{30} + \frac{5x^2}{30} - \frac{27x}{30}$$

$$\frac{6x^2-42x+60+2x^2-98-7}{30} = \frac{3x^2-18x+27+5x^2-27x}{30}$$

Moltiplico entrambi i membri per 30 per eliminare i denominatori e sommo i termini simili: $8x^2 - 42x - 45 = 8x^2 - 45x + 27$ sposto i termini con l'incognita a sinistra:

$8x^2 - 8x^2 - 42x + 45x = 45 + 27$ e ottengo: $3x = 72$ divido entrambi per 3: $\frac{3x}{3} = \frac{72}{3}$

$x = 24$

3 Partendo dall'equazione generale delle rette $y = mx + k$, scrivi l'equazione della retta r di coefficiente angolare $m = 2$, passante per il punto $A(0; -3)$ e rappresentala graficamente in un riferimento cartesiano, assumendo una unità di misura a piacere.

Scrivi l'equazione della retta s passante per il punto $C(0; 2)$ e perpendicolare alla retta r nel punto B.

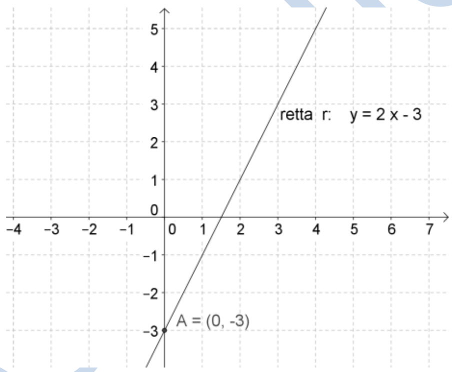
Determina graficamente le coordinate del punto B; calcola l'area del triangolo CBD, essendo D il punto in cui la retta p di equazione $x = 3$ incontra la retta r.

Procedimento: Se l'equazione deve avere m=2 sostituiamo tale valore nell'equazione generale: $r\!: \ y = 2x + k$ inoltre, poiché deve passare per il punto A di coordinate x=0 e y=-3 possiamo trovare il valore di k sostituendo tali valori alla x e alla y dell'equazione:

$-3 = 2 \cdot (0) + k \qquad -3 = k$ quindi se m=2 e k=-3 la nostra equazione sarà:

$$r\!: \ y = 2x - 3$$

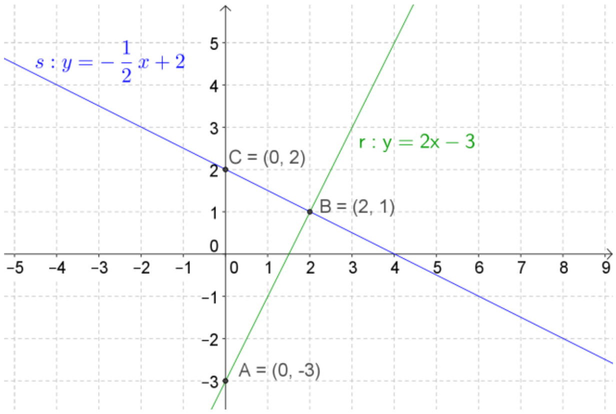
Questa è la sua rappresentazione grafica:



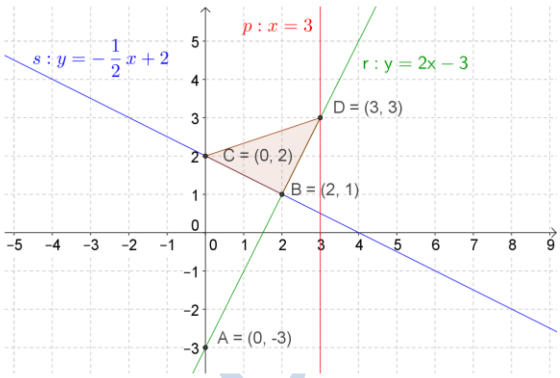
La retta s, perpendicolare alla r, avrà il coefficiente angolare $n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

Quindi sarà del tipo: $s\!: \ y = -\frac{1}{2}x + k$ ma poiché deve passare per il punto C (0; 2)

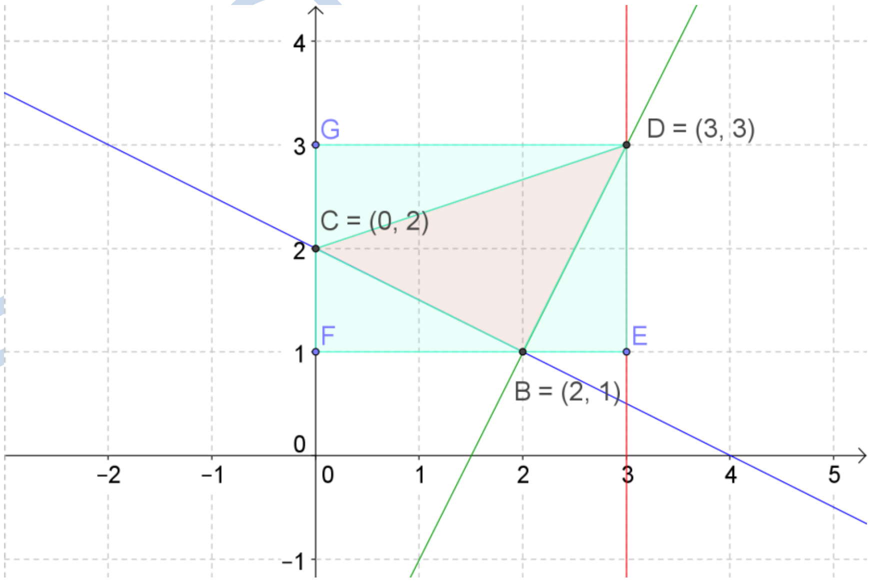
Come prima, possiamo trovare k. $2 = -\frac{1}{2} \cdot (0) + k$ da cui k=2 e questa sarà la sua equazione: $s\!: \ y = -\frac{1}{2}x + 2$ che nel grafico diventa:



Graficamente vediamo che le coordinate del punto B, intersezione delle due rette, sono x=2; y=1. Il triangolo BCD è quello rosso.



Per trovare la sua area conviene considerare il rettangolo DEFG:



Che ha l'area di $DEFG = FE \times ED = 3 \times 2 = 6$ unità e sottrarre le aree dei 3 triangolini azzurri che hanno le aree di:

$BED = \frac{BE \times DE}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ unità; $BCF = \frac{BF \times CF}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$ unità; $CDG = \frac{DG \times CG}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5$ unità.

Quindi l'area del triangolo $BCD = 6 - 1 - 1 - 1{,}5 = 2{,}5$ unità.

4 Fra le caratteristiche ereditarie del sangue ha particolare importanza il fattore Rh. Ricordiamo che le situazioni possibili sono le seguenti:

RR - persona con il fattore Rh positivo (omozigote);

rr - persona con il fattore Rh negativo (omozigote);

Rr - persona con il fattore Rh positivo, ma che può trasmettere anche il fattore negativo(eterozigote).

Supponi che in una coppia la madre, Caterina, sia del tipo *Rr* e il padre, Filippo, sia del tipo *RR*; quali situazioni sono possibili per i figli? Con quale probabilità ciascuna?

In un'altra coppia, Sara è il tipo *Rr* e Paolo del tipo *rr*.

Quali possibilità per i figli? Con quale probabilità ciascuna?

Un figlio di Caterina e Filippo ha sposato una figlia di Sara e Paolo ed è nato un bambino Rh negativo. Analizza i casi possibili riguardo al babbo e alla mamma del bambino.

Procedimento: Tabella a doppia entrata che illustra la situazione Caterina (Rr) e Filippo (RR):

		Filippo	
		R	R
Caterina	R	**RR**	**RR**
	r	**Rr**	**Rr**

Le probabilità dei figli sono: RR 50% e Rr 50%

Questo invece è il caso di Sara (Rr) e Paolo (rr):

		Paolo	
		r	r
Sara	R	**Rr**	**Rr**
	r	**rr**	**rr**

Le probabilità per i loro figli sono: Rr 50% e rr 50%

Il bambino con Rh negativo deve avere la coppia rr. Vediamo in quali circostanze può nascere un bambino rr. Il padre potrebbe essere RR o Rr e la madre Rr o rr. Vediamo i casi possibili.

		Padre figlio di Caterina e Filippo	
		R	R
Madre	R	**RR**	**RR**
Figlia di Sara e Paolo	r	**Rr**	**Rr**

Primo caso: RR 50% e Rr 50% Nessuna probabilità che nasca rr

		Padre figlio di Caterina e Filippo	
		R	R
Madre	r	**Rr**	**Rr**
Figlia di Sara e Paolo	r	**Rr**	**Rr**

Secondo caso: Rr 100%, nessuna probabilità che nasca un figlio rr

		Padre figlio di Caterina e Filippo	
		R	r
Madre	R	**RR**	**Rr**
Figlia di Sara e Paolo	r	**Rr**	**rr**

Terzo caso: RR 25% Rr 50% e rr 25% Esiste il 25% di probabilità che nascano figli rr.

		Padre figlio di Caterina e Filippo	
		R	r
Madre	r	**Rr**	**rr**
Figlia di Sara e Paolo	r	**Rr**	**rr**

Quarto caso: Rr 50% e rr 50% Esiste il 50% di probabilità che nascano figli rr.